

# Mathematische Logik

7. Februar 2008

Gehalten im

**Wintersemester 2007 / 2008**

von

**PROF. DR. PETER SCHROEDER-HEISTER**

Mitschrift von

**TILL HELGE HELWIG**

Ich garantiere nicht, dass diese Mitschrift bis zum Ende durchgezogen wird, da sie recht viel Aufwand bedeutet. Wenn sich jemand daran beteiligen und so sicherstellen möchte, dass sie komplett fertig wird, würde ich mich freuen.

# 1 Aussagenlogik

## 1.1 Aussagen und Junktoren

### 1.1.1 Definition

Das Alphabet der Sprache der Aussagenlogik besteht aus:

1. Aussagesymbolen:  $p_0, p_1, p_2, \dots$   
Metasprachliche Variable:  $p_\star$  ("Aussagevariablen")
2. Junktoren (Verknüpfungszeichen, Konnektive):
  - 0-stellig:  $\perp$  (Falsum)
  - 1-stellig:  $\neg$  (Negation)
  - 2-stellig:  $\wedge$  (Konjunktion),  
 $\vee$  (Disjunktion),  
 $\Rightarrow$  (Implikation),  
 $\Leftrightarrow$  (Biimplikation, Äquivalenz)

Metasprachliche Variable:  $\square$
3. Hilfszeichen:  $(, )$

Die Aussagesymbole und  $\perp$  heißen auch *atomare Aussagen* oder *Atome*.

### 1.1.2 Definition (Aussagenmenge PROP)

Die Menge *PROP* der Aussagen oder Formen ist die kleinste Menge  $X$ , für die gilt:

1.  $p_\star \in X, \perp \in X$
2.  $\varphi, \psi \in X \Rightarrow (\varphi \square \psi) \in X$
3.  $\varphi \in X \Rightarrow \neg\varphi \in X$

( $\varphi$  und  $\psi$  sind metasprachliche Variablen für Zeichenreihen - später werden sie für Aussagen verwendet.)

Jeder induktiven Definition entspricht ein Induktionsprinzip:

**Beispiel:** Sei  $\mathbb{N}$  die kleinste Menge  $X$ , für die gilt:  $0 \in X, n \in X \Rightarrow n+1 \in X$   
Dann gilt: Sei  $A$  eine Eigenschaft, so dass

1.  $A(0)$
2.  $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Dann gilt  $A(n)$  für jedes  $n$ .

**Beweis:** Betrachte  $X := \{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ , dann gilt:

1.  $0 \in X$
2.  $n \in X \Rightarrow n| \in X$

Also ist  $X$  eine Menge, für die 1. und 2. gilt. Also ist  $\mathbb{N} \in X$  die kleinste Menge, für die 1. und 2. gilt. Also gilt  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

### 1.1.3 Theorem (Induktionsprinzip für Aussagen)

Sei  $A$  eine Eigenschaft, so dass gilt:

1.  $A(p_\star), A(\perp)$
2.  $A(\varphi), A(\psi) \Rightarrow A((\varphi \square \psi))$
3.  $A(\varphi) \Rightarrow A((\neg\varphi))$

Dann gilt  $A(\varphi)$  für alle  $\varphi \in PROP$ .

**Beweis:** Betrachte  $X := \{\varphi \in PROP : A(\varphi)\}$ , dann gilt:  $p_\star, \perp \in X$ ;  $\varphi, \psi \in X \Rightarrow (\varphi \square \psi) \in X$ ;  $\varphi \in X \Rightarrow (\neg\varphi) \in X$ . Da  $PROP$  die kleinste Menge mit diesen Eigenschaften ist, gilt:  $PROP \leq X$ . Also gilt  $A(\varphi)$  für alle  $\varphi \in PROP$ .

**Beispiel:** Jede Aussage hat eine gerade Anzahl von Klammern.

**Beweis:**

IA:  $p_\star, \perp$  haben 0 Klammern.

IS:  $\varphi$  habe  $2n$  Klammern und  $\psi$  habe  $2m$  Klammern, dann hat  $(\varphi \square \psi)$   $2n + 2m + 2 = 2(n + m + 1)$  Klammern und  $(\neg\varphi)$  hat  $2n + 2 = 2(n + 1)$  Klammern.

### 1.1.4 Definition (Bildungsfolgen)

Eine Bildungsfolge für  $\varphi$  (von  $\varphi$ ) ist eine Folge  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  mit  $\varphi_n = \varphi$ , so dass für jedes  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) einer der folgenden Fälle gilt:

1.  $\varphi_i$  ist atomar
2.  $\varphi_i$  ist  $(\varphi_j \square \varphi_k)$  für  $j, k < i$
3.  $\varphi_i$  ist  $(\neg\varphi_j)$  für  $j < i$

**Beweis:**

1. In einer Bildungsfolge für  $\varphi$  können "irrelevante" Elemente vorkommen.
2. Jedes Anfangsstück einer Bildungsfolge ist eine Bildungsfolge.

### 1.1.5 Theorem (PROP und Bildungsfolgen)

$PROP$  ist die Menge aller Ausdrücke, für die es Bildungsfolgen gibt.

**Beweis:** Sei  $F$  die Menge aller Ausdrücke, für die es Bildungsfolgen gibt.

$PROP \leq F$ : IA: Automare Aussage  $p_*$  und  $\perp$  sind eindeutige Bildungsfolgen.

IS: Seien  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  und  $\psi_0, \dots, \psi_m = \psi$ ,  $(\varphi_n \sqcap \psi_m)$  Bildungsfolge für  $\varphi \sqcap \psi$ .

Analog für  $\neg$ .

$F \leq PROP$ : Sei  $\varphi_0, \dots, \varphi_n$  Bildungsfolge.

Zeige:  $\varphi_n \in PROP$  ist die Induktion über  $n$ .

$n = 0$ :  $\varphi_0$  ist nach Definition atomar, aber  $\varphi_0 \in PROP$ .

Seien alle Ausdrücke mit Bildungsfolge der Länge  $m < n$  in  $PROP$ .

$\varphi_n$  ist atomar.  $\checkmark$

$\varphi_n = (\varphi_i \sqcap \varphi_j)$  für  $i, j < n$

Da  $\varphi_i$  und  $\varphi_j$  kürzere Bildungsfolgen sind, müssen  $\varphi_i, \varphi_j \in PROP$

Damit  $(\varphi_i \sqcap \varphi_j) \in PROP$ .  $\checkmark$

$\varphi_n = (\neg\varphi_i)$  analog.

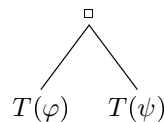
**Definition (Struktur oder Gliederungsbäume)**

Falls  $\varphi$  atomar, dann  $T(\varphi) =$

$T((\varphi \sqcap \psi)) =$

$T((\neg\varphi)) =$

$\varphi$



**1.1.6 Definition (Teilformeln)**

$Sub(\varphi) = \{\varphi\}$  falls  $\varphi$  atomar.

$Sub((\varphi \sqcap \psi)) = \{(\varphi \sqcap \psi)\} \cup Sub(\varphi) \cup Sub(\psi)$

$Sub((\neg\varphi)) = \{(\neg\varphi)\} \cup Sub(\varphi)$

$\psi$  heißt Teilformel von  $\varphi$ , falls  $\psi \in Sub(\varphi)$ .

**1.1.7 Theorem (Definition durch Rekursion)**

Seien Abbildungen  $H_{\sqcap} : A \times A \rightarrow A$  und  $H_{\neg} : A \rightarrow A$  Abbildungen aus der Menge der Atome in  $A$ , dann gibt es genau eine Abbildung:  $F : PROP \rightarrow A$  mit

- $F(\varphi) = H_{at}(\varphi)$ , falls  $\varphi$  atomar
- $F((\varphi \sqcap \psi)) = H_{\sqcap}(F(\varphi), F(\psi))$
- $F((\neg\varphi)) = H_{\neg}(F(\varphi))$

**Definition (Rang von Aussagen)**

$r(p_*) = r(\perp) = 0$

$r((\varphi \sqcap \psi)) = \max(r(\varphi), r(\psi)) + 1$

$r((\neg\varphi)) = r(\varphi) + 1$

**1.1.8 Theorem (Ranginduktion)**

$(\forall\psi) [r(\psi) < r(\varphi) \Rightarrow A(\psi)] \Rightarrow A(\varphi) \Rightarrow \forall\varphi A(\varphi)$

Die Relation  $\varphi \text{sub} \psi$ :  $\varphi \in Sub(\psi)$  ist transitiv.

**Beweis:**  $\sigma_{\text{sub}}\psi_{\text{sub}}\varphi$

Sei  $\varphi$  atomar, dann  $\varphi = \psi = \sigma$ .

Sei  $\varphi = (\varphi_1 \sqcap \varphi_2)$ , dann entweder:

1.  $\psi = \varphi_1 \sqcap \varphi_2 = \varphi \checkmark$
2.  $\psi_{\text{sub}}\varphi_1$
3.  $\psi_{\text{sub}}\varphi_2$

$\sigma_{\text{sub}}\varphi_1$  und IV

Dann  $\sigma_{\text{sub}}\varphi$

Sei  $\varphi = (\neg\varphi_1)$  analog.

**Abkürzung:**  $\varphi \stackrel{\leq}{\approx} \psi$  für  $r(\varphi) \stackrel{\leq}{\approx} r(\psi)$

$$\forall\varphi[\underbrace{(\forall\psi < \varphi : A(\psi))}_{=B(\varphi)}] \Rightarrow A(\varphi) \Rightarrow \forall\varphi : A(\varphi)$$

**Beweis:** Zeige, dass  $\forall\varphi : B(\varphi)$ . Dann gilt auch  $\forall\varphi : B(\varphi)$ , da  $\varphi$  beliebig komplex gewählt werden kann.

1.  $\varphi$  atomar: Dann gilt  $B(\varphi)$  trivialerweise, da  $\psi < \varphi$  falsch.
2.  $\varphi = (\varphi_1 \sqcap \varphi_2)$ : Sei  $B(\varphi_1)$  und  $B(\varphi_2)$ . Sei  $\rho < \varphi$ . Zu zeigen:  $A(\rho)$ . Es gilt  $\rho \leq \varphi_1$  oder  $\rho \leq \varphi_2$ . Da nach IV gilt:  $B(\varphi_i)$ , gilt  $A(\rho)$ .  $\checkmark$
3.  $\varphi = (\neg\varphi_1)$  analog.

**Beispiel:**  $\varphi$  habe  $n$  Konnektive (=  $n$  Vorkommen von Konnektiven). Dann  $\#(Sub(\varphi)) \leq 2n + 1$

Beweis:

1.  $\varphi$  atomar:  $\#(Sub(\varphi)) = \#(\{\varphi\}) = 1 \leq 1$
2.  $\varphi = \varphi_1 \sqcap \varphi_2$ :  $n = n_1 + n_2 + 1$ , wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Anzahl der Konnektive in  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$ .

$$\begin{aligned} \#(Sub(\varphi)) &\leq \#(Sub(\varphi_1)) + \#(Sub(\varphi_2)) + 1 \\ &\leq 2n_1 + 1 + 2n_2 + 1 + 1 \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

Zu jeder nicht atomaren Aussage  $\sigma$  gibt es eindeutig bestimmte Aussagen  $\varphi$  und  $\psi$  mit  $\sigma = (\varphi \sqcap \psi)$  oder  $\sigma = (\neg\varphi)$ .

**Beweis:**  $\sigma$  atomar: Nichts zu zeigen.

Sei  $\sigma$  nicht atomar, dann fängt  $\sigma$  mit ( an. Also ist  $\sigma = at$  nicht möglich. Betrachte alle anderen Fälle.

$\sigma = (\neg\varphi)$ :  $(\neg\varphi) = (\neg\varphi') \Rightarrow \varphi = \varphi'$

$(\neg\varphi) = (\varphi_1 \sqcap \varphi_2)$ : Geht nicht: Falls  $\varphi_1$  atomar, ist  $\varphi_1 \neq \neg$ . Falls  $\varphi_1$  nicht atomar, ist  $\neg \neq ($

$\sigma = (\varphi_1 \sqcap \varphi_2)$

$(\varphi_1 \sqcap \varphi_2) = (\varphi'_1 \sqcap \varphi'_2)$ : Falls  $\varphi_1 = at$ , gilt auch  $\varphi_2 = at$ :  $(at \sqcap \varphi_2) = (at \sqcap \varphi'_2) \Rightarrow \varphi_2 = \varphi'_2$

$((\psi_1) \sqcap (\psi_2)) = ((\psi'_1) \sqcap (\psi'_2)) \Rightarrow \psi_1 = \psi'_1, \psi_2 = \psi'_2$

Man benutzt:  $a_1b_1a_2 \dots a_nb_n a_{n+1} = a_1b'_1a_2 \dots a_nb'_n a_{n+1}$  und  $|a_i| \geq 1$  für  $2 \leq i \leq n \Rightarrow b_1 = b'_1, \dots, b_n = b'_n$

## 1.2 Semantik

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \vee \psi$	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \rightarrow \psi$	$\neg\varphi$
1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	1

### 1.2.1 Definition (Bewertung)

Eine Bewertung  $v$  ist eine Zuordnung von Wahrheitswerten zu Aussagevariablen. Die Bewertung  $\llbracket \cdot \rrbracket_v$  als Funktion  $PROP \rightarrow \{0, 1\}$  ist wie folgt definiert:

- $\llbracket \perp \rrbracket_v := 0$
- $\llbracket p \rrbracket_v := v(p_*)$
- $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_v := \min(\llbracket \varphi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$
- $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_v := \max(\llbracket \varphi \rrbracket_v, \llbracket \psi \rrbracket_v)$
- $\llbracket \neg\varphi \rrbracket_v := 1 - \llbracket \varphi \rrbracket_v$
- $\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v = 0 \Leftrightarrow \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$  und  $\llbracket \psi \rrbracket_v = 0$

### 1.2.2 Theorem

Sei  $v : AV \rightarrow \{0, 1\}$  gegeben, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Bewertung  $\llbracket \cdot \rrbracket_v$  aller Formeln mit  $\llbracket p_* \rrbracket_v = v(p_*)$ .

### 1.2.3 Lemma

Falls  $v(p_*) = v'(p_*)$  für alle  $p_*$  in  $\varphi$ , dann  $\llbracket \varphi \rrbracket_v = \llbracket \varphi \rrbracket_{v'}$ .

### 1.2.4 Definition (Tautologie)

1.  $\varphi$  heißt *Tautologie*, falls  $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$  für alle  $v$ .
2. Sei  $\Gamma$  Menge von Aussagen, dann heißt  $\varphi$  eine (aussagenlogische) Folgerung aus  $\Gamma$ , falls für  $v : (\forall \psi \in \Gamma) \llbracket \psi \rrbracket_v = 1 \Rightarrow \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$

Symbol:  $\Gamma \models \varphi$   
 $\varphi \models \psi$  (logische Äquivalenz)

Schreibweise:  $\psi_1, \dots, \psi_n \models \varphi$

**Anmerkung:** Eine Aussage  $\varphi$  ist erfüllbar, wenn es ein  $v$  gibt, so dass  $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$ .

### 1.2.5 Lemma

$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \varphi$

**1.2.6 Definition (Substitution)**

- $\perp[\psi/p_\star] = \perp$
- $p_i[\psi/p_j] = \begin{cases} \psi & , \text{ falls } i = j \\ p_i & , \text{ falls } i \neq j \end{cases}$
- $(\neg\varphi)[\psi/p_\star] = \neg\varphi[\psi/p_\star]$
- $(\varphi_1 \square \varphi_2)[\psi/p_\star] = \varphi_1[\psi/p_\star] \square \varphi_2[\psi/p_\star]$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} (p_{17} \wedge (\perp \rightarrow p_{23}))[(p_1 \wedge p_2)/p_{23}] &= p_{17}[(p_1 \wedge p_2)/p_{23}] \wedge (\perp \rightarrow p_{23})[(p_1 \wedge p_2)/p_{23}] \\ &= p_{17} \wedge (\perp[(p_1 \wedge p_2)/p_{23}] \rightarrow p_{23}[(p_1 \wedge p_2)/p_{23}]) \\ &= p_{17} \wedge (\perp \rightarrow (p_1 \wedge p_2)) \end{aligned}$$

**1.2.7 Theorem (Substitutionsatz)**

$$\begin{aligned} \varphi_1 \models \varphi_2 &\Rightarrow \psi[\varphi_1/p_\star] \models \psi[\varphi_2/p_\star] \\ \models \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 &\Rightarrow \dots \end{aligned}$$

**Beweis:**

1.  $\psi$  atomar:  $\psi = \perp \Rightarrow \perp \models \perp$   
 $\psi = p_i, p = p_j, i \neq j \Rightarrow p_i \models p_i, i = j \Rightarrow p_j \models p_j$
2.  $\psi = \psi_1 \square \psi_2 : \psi_1[\varphi_1/p] \models \psi_1[\varphi_2/p]$   
 $\psi_2[\varphi_1/p] \models \psi_2[\varphi_2/p]$   
 $(\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_1/p] \models (\psi_1 \square \psi_2)[\varphi_2/p]$
3.  $\psi = \neg\psi_1$  analog.

**1.3 Grundgesetze der Aussagenlogik**

**1.3.1 Theorem (Algebraische Gesetze)**

$$\begin{aligned} \varphi \wedge \psi &\models \psi \wedge \varphi \quad (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi \models \varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \quad (\text{Assoziativitat}) \\ \varphi \vee \psi &\models \psi \vee \varphi \quad (\varphi \vee \psi) \vee \chi \models \varphi \vee (\psi \vee \chi) \\ \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) &\models (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma) \quad (\text{Distributivitat}) \\ \varphi \wedge (\psi \vee \sigma) &\models (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \sigma) \\ \neg(\varphi \vee \psi) &\models \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad (\text{de Morgan}) \\ \neg(\varphi \wedge \psi) &\models \neg\varphi \vee \neg\psi \\ \varphi \vee \varphi &\models \varphi \quad (\text{Idempotenz}) \\ \varphi \wedge \varphi &\models \varphi \end{aligned}$$

**1.3.2 Theorem (Algebraische Umformungen)**

$$\begin{aligned} \varphi \leftrightarrow \psi &\models (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) \\ \varphi \rightarrow \psi &\models \neg\varphi \vee \psi \models \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \vee \psi &\models \neg\varphi \rightarrow \psi \\ \varphi \vee \psi &\models \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \wedge \psi &\models \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \varphi \wedge \psi &\models \neg(\varphi \rightarrow \neg\psi) \\ \neg\varphi &\models \varphi \rightarrow \perp \\ \perp &\models \varphi \wedge \neg\varphi \end{aligned}$$

**1.3.3 Definition (Simultane Substitution)**

$\varphi[\psi_1/q_1, \dots, \psi_n/q_n]$ : das Resultat der *gleichzeitigen* Ersetzung von  $q_i$  durch  $\psi_i$  für alle  $i$  ( $i \leq n$ ) in  $\varphi$ .

Unterschied zur Hintereinander-Ersetzung:

$$\begin{aligned} (p_1 \wedge p_2)[p_2/p_1, p_3/p_2] &= (p_2 \wedge p_3) \\ (p_1 \wedge p_2)[p_2/p_1] &= (p_2 \wedge p_2) \\ (p_2 \wedge p_2)[p_3/p_2] &= (p_3 \wedge p_3) \neq (p_2 \wedge p_3) \end{aligned}$$

**1.3.4 Funktionale Vollständigkeit**

Sei  $\$$  ein  $n$ -stelliger Junktor, für den eine Wahrheitstafel definiert ist:

$\varphi_1$	$\dots$	$\varphi_n$	$\$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$
1	$\dots$	1	1
1	$\dots$	1	0
1	$\dots$	0	1
$\vdots$			$\vdots$

Anders ausgedrückt: Die Bewertung von  $\$(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  ist durch seine  $n$ -stellige Wahrheitsfunktion  $f : (0, 1)^n \rightarrow (0, 1)$  gegeben, so dass gilt:  $\llbracket \$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \rrbracket_v = f(\llbracket \$(\varphi_1) \rrbracket_v, \dots, \llbracket \$(\varphi_n) \rrbracket_v)$  wobei  $v$  der Bewertung der Aussagevariable ist.

**1.3.5 Theorem**

Zu jedem  $n$ -stelligem Junktor  $\$$  ( $n \geq 1$ ) gibt es eine Aussage  $\tau$ , die nur die Aussagevariablen  $p_1, \dots, p_n$  und die Junktoren  $\vee, \wedge$  und  $\neg$  enthält, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \$(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &\models \tau[\varphi_1/p_1, \dots, \varphi_n/p_n] \\ \$(p_1, \dots, p_n) &\models \tau \end{aligned}$$

**Beweis:** Induktion über  $n$

IA:  $n = 1$ : 4 mögliche Wahrheitstafeln

$\varphi_1$	$\$_1(\varphi_1)$	$\$_2(\varphi_1)$	$\$_3(\varphi_1)$	$\$_3(\varphi_1)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0
	$\varphi_1 \vee \neg\varphi_1$	$\varphi_1$	$\neg\varphi_1$	$\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1$
	$p_1 \vee \neg p_1$	$p_1$	$\neg p_1$	$p_1 \wedge \neg p_1$

IS: Betrachte  $\$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1})$

$$\begin{aligned} \$_1(\varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}) &:= \$(\varphi_1 \vee \neg\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}) \\ \$_2(\varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}) &:= \$(\varphi_1 \wedge \neg\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}) \end{aligned}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} \$_1(\varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}) &\models \tau_1[\varphi_2/p_1, \dots, \varphi_{n+1}/p_n] \\ \$_2(\varphi_2, \dots, \varphi_{n+1}) &\models \tau_2[\varphi_2/p_1, \dots, \varphi_{n+1}/p_n] \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\$(\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}) \\ &\models (\varphi_1 \wedge \$_1(\varphi_2, \dots, \varphi_{n+1})) \vee (\neg\varphi_1 \wedge \$_2(\varphi_2, \dots, \varphi_{n+1})) \\ &\models \varphi_1 \wedge \tau_1[\varphi_2/p_2, \dots, \varphi_n/p_{n+1}] \vee \neg\varphi_1 \wedge \tau_2[\varphi_2/p_1, \dots, \varphi_n/p_{n+1}] \end{aligned}$$

Setze:

$$\tau := p_1 \wedge \tau_1[p_2/p_1, \dots, p_{n+1}/p_n] \vee \neg p_1 \wedge \tau_2[p_2/p_1, \dots, p_{n+1}/p_n]$$

**Beispiel:**

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\mathbb{S}(\varphi_1, \varphi_2)$	
1	1	0	Zeilen 1, 2: $\neq \varphi_2$
1	0	1	Zeilen 3, 4: $\varphi_2 \wedge \neg \varphi_2$
0	1	0	
0	0	0	Insgesamt: $(\varphi_1 \wedge \neg \varphi_2) \vee (\neg \varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \neg \varphi_2))$

**Beispiel:**

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\mathbb{S}(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$	
1	1	1	1	Zeilen 1, 2: $\varphi_3$
1	1	0	0	
1	0	1	0	Zeilen 3, 4: $\neg \varphi_3$
1	0	0	1	
0	1	1	1	Zeilen 5, 6: $\varphi_3$
0	1	0	0	
0	0	1	1	Zeilen 7, 8: $\varphi_3 \vee \neg \varphi_3$
0	0	0	1	

1,2,3,4:  $(\varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee (\neg \varphi_2 \wedge \varphi_3)$

5,6,7,8:  $(\varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee (\neg \varphi_2 \wedge (\varphi_3 \vee \neg \varphi_3))$

$\Rightarrow (\varphi_1 \wedge (\varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee (\neg \varphi_2 \wedge \varphi_3)) \vee (\neg \varphi_1 \wedge ((\varphi_2 \wedge \varphi_3) \vee (\neg \varphi_2 \wedge (\varphi_3 \vee \neg \varphi_3))))$

**Bemerkung:**

| (Schefferscher Strich) und  $\downarrow$  (Peirce'scher Pfeil) sind funktional vollständig.

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_1   \varphi_2$	$\varphi_1 \downarrow \varphi_2$
1	1	0	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	1	1

**1.3.6 Definition (Funktionale Vollständigkeit)**

Eine Menge von Junktoren heißt funktional vollständig,  $\llbracket \varphi^* \rrbracket_v = \llbracket \neg \varphi \rrbracket_v$  wenn sich jeder  $n (\geq 1)$ -stelliger Junktor mit Hilfe von Junktoren dieser Menge ausdrücken lässt.

**Alternative Definition**  
 Eine Menge  $K$  von Konnektiven nennt man *funktional vollständig*, wenn zu  $n$ -stelligem Junktor  $\mathbb{S}$  eine Proposition  $\tau$  existiert, die nur aus  $p_1 \dots p_n$  und den Konnektiven aus  $K$  aufgebaut ist, mit der Eigenschaft:  
 $\models \tau \leftrightarrow \mathbb{S}(p_1, \dots, p_n) \ (n \geq 1)$ .

**1.3.7 Definition (Disjunktion und Konjunktion)**

$$\bigwedge_{i \leq 0} \varphi_i := \varphi_0$$

$$\bigvee_{i \leq 0} \varphi_i := \varphi_0$$

$$\bigwedge_{i \leq n+1} \varphi_i = \bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \wedge \varphi_{n+1}$$

$$\bigvee_{i \leq n+1} \varphi_i = \bigvee_{i \leq n} \varphi_i \vee \varphi_{n+1}$$

**1.3.8 Lemma**

1.  $\neg \bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq n} \varphi_{ij} \equiv \bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq n} \neg \varphi_{ij}$  [ $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ ]  
 $\neg \bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq n} \varphi_{ij} \equiv \bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq n} \neg \varphi_{ij}$
2.  $\bigwedge_{i \leq n} \varphi_i \vee \bigwedge_{j \leq n} \psi_j \equiv \bigwedge_{j \leq n} \bigvee_{i \leq n} (\varphi_i \vee \psi_j)$  [ $(\varphi \wedge \psi) \vee \sigma \equiv (\varphi \vee \sigma) \wedge (\psi \vee \sigma)$ ]  
 $\bigvee_{i \leq n} \varphi_i \wedge \bigvee_{j \leq n} \psi_j \equiv \bigvee_{i \leq n} (\varphi_i \wedge \psi_j)$

**1.3.9 Definition (Konjunktive und Disjunktive Normalform)**

Ein Literal hat die Form  $p$  oder  $\neg p$ .

Eine konjunktive Normalform ist  $\bigwedge_{i \leq n} \bigvee_{j \leq n} \varphi_{ij}$  wobei  $\varphi_{ij}$  Literale sind.

Eine disjunktive Normalform ist  $\bigvee_{i \leq n} \bigwedge_{j \leq n} \varphi_{ij}$  wobei  $\varphi_{ij}$  Literale sind.

**Beweis:**  $p_1 \wedge \neg p_2, p_1 \vee \neg p_2$  sowohl konjunktive als auch disjunktive Normalform.

**Beispiel:**  $(p_1 \vee p_2) \wedge (\neg p_1 \vee p_2) \wedge \dots$

**1.3.10 Theorem**

Zu jedem  $\varphi$  gibt es eine konjunktive Normalform  $\varphi^c$  und eine disjunktive Normalform  $\varphi^d$  mit  $\varphi \equiv \varphi^c \equiv \varphi^d$ .

**Beweis:**

Betrachte Formel in  $\vee, \wedge, \neg$ :

1.  $\varphi$  atomar:  $\varphi^c := \varphi =: \varphi^d$
2.  $\varphi = \psi \wedge \sigma$ :  $\varphi^c := \psi^c \wedge \sigma^c$   
 Sei  $\psi^d = \bigvee \psi_i$  und  $\sigma^d = \bigvee \sigma_j$   
 $\varphi \equiv \bigvee \psi_i \wedge \bigvee \sigma_j \equiv \bigvee (\psi_i \wedge \sigma_j) =: \varphi^d$ , da  $\psi_i$  und  $\sigma_j$  Elementarkonjunktion.
3.  $\varphi = \psi \vee \sigma$ : Analog ( $d$  und  $c$  vertauscht)
4.  $\varphi = \neg\psi$ :  $\psi^d = \bigvee \bigwedge \psi_{ij}$   $\psi^c = \bigwedge \bigvee \psi'_{ij}$   
 $\varphi \equiv \neg\psi^d = \neg \bigvee \bigwedge \psi_{ij} \equiv \bigwedge \bigvee \neg\psi_{ij} \equiv \bigwedge \bigvee \overline{\psi_{ij}}$   
 $\overline{\psi_{ij}} = \begin{cases} \psi_{ij} & \text{falls } \psi_{ij} = p \text{ oder } \neg p \\ p & \text{falls } \psi_{ij} = \neg\neg p \end{cases}$

**Beispiel:**

Disjunktive Normalform:                      Konjunktive Normalform:

$$\begin{array}{l} (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow p_3 \\ \underbrace{\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3}_{\neg\neg p_1 \wedge \neg p_2} \\ (p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underbrace{\neg(\neg p_1 \vee p_2) \vee p_3}_{\neg\neg p_1 \wedge p_2} \\ \underbrace{(p_1 \wedge p_2) \vee p_3}_{(p_1 \vee p_3) \wedge (p_2 \vee p_3)} \end{array}$$

Betrachte Formeln in  $\wedge, \vee, \neg$ :

**1.3.11 Definition**

$\star : PROP \rightarrow PROP$   
 $\varphi^\star := \neg\varphi$  falls  $\varphi$  atomar  
 $(\varphi \wedge \psi)^\star := \varphi^\star \vee \psi^\star$   
 $(\varphi \vee \psi)^\star := \varphi^\star \wedge \psi^\star$   
 $(\neg\varphi)^\star := \neg\varphi^\star$

**1.3.12 Lemma**

$$\llbracket \varphi^\star \rrbracket_v = \llbracket \neg\varphi \rrbracket_v$$

**1.3.13 Korollar**

$$\varphi^\star \models \neg\varphi$$

**1.4 Dualität****1.4.1 Definition (Dualität)**

$d : PROP \rightarrow PROP$  (Dualitätsabbildung)  
 $\varphi^d := \varphi$  falls  $\varphi$  atomar  
 $(\varphi \wedge \psi)^d := \varphi^d \vee \psi^d$   
 $(\varphi \vee \psi)^d := \varphi^d \wedge \psi^d$   
 $(\neg\varphi)^d := \neg\varphi^d$

**1.4.2 Dualitätssatz**

$$\varphi \models \psi \text{ genau dann, wenn } \varphi^d \models \psi^d$$

**Beweis:**

Sei  $\varphi \models \psi$ , dann  $\neg\varphi \models \neg\psi$ , dann  $\varphi^\star \models \psi^\star$   
 Daher  $\varphi^\star[\neg p_0/p_0, \dots, \neg p_n/p_n] \models \psi^\star[\neg p_0/p_0, \dots, \neg p_n/p_n]$   
 Also  $\varphi^d[\neg\neg p_0/p_0, \dots, \neg\neg p_n/p_n] \models \psi^d[\neg\neg p_0/p_0, \dots, \neg\neg p_n/p_n]$   
 $\varphi^d \models \psi^d \Rightarrow \varphi^{dd} \models \psi^{dd} \Rightarrow \varphi \models \psi$

**Allgemeine Behandlung der Dualität**

$$\overline{\llbracket \varphi \rrbracket_v} := 1 - \llbracket \varphi \rrbracket_v$$

**1.4.3 Definition (Dualer Junktor)**

Sei  $\bar{v}(p) := 1 - v(p)$ . Der zum  $n$ -stelligen Junktor  $J$  duale Junktor  $J^d$  ist wie folgt definiert:

$$\llbracket J^d(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \rrbracket_v := \overline{\llbracket J(\varphi_n, \dots, \varphi_1) \rrbracket_{\bar{v}}}$$

**Prozedur:** Man erhält den zu  $J$  dualen Junktor, indem man in der Wahrheitstafel für  $J$  überall 1 und 0 vertauscht.

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_1 \wedge \varphi_2$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

 $\rightsquigarrow$ 

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_1 \vee \varphi_2$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

 $\rightsquigarrow$ 

$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_1 \leftarrow \varphi_2$
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	0

$\varphi_1$	$\neg\varphi_1$
0	1
1	0

 $\rightsquigarrow$ 

$\varphi_1$	$\neg\varphi_1$
1	0
0	1

 $\perp \rightsquigarrow \top$ 

Die zu  $\varphi$  duale Formel  $\varphi^d$  entsteht aus  $\varphi$  dadurch, dass man jedes  $J$  in  $\varphi^d$  durch  $J^d$  ersetzt.

**1.4.4 Satz**

$$\llbracket \varphi^d \rrbracket_v = \overline{\llbracket \varphi \rrbracket_{\bar{v}}} \quad \llbracket \varphi^d \rrbracket_{\bar{v}} = \overline{\llbracket \varphi \rrbracket_v}$$

**1.4.5 Satz**

$\varphi^{dn}$  entstehe aus  $\varphi$  wie folgt: Wir bilden zunächst  $\varphi^d$ . Ersetze jedes  $p$  durch  $\neg p$ , falls vor  $p$  kein  $\neg$  steht, sonst  $\neg p$  durch  $p$ .

Dann gilt:  $\varphi^{dn} \models \neg\varphi$

**Beweis:**

$$\llbracket \varphi^{dn} \rrbracket_v = \llbracket \varphi^d \rrbracket_{\bar{v}} = \overline{\llbracket \varphi \rrbracket_v} = \llbracket \neg\varphi \rrbracket_v$$

de Morgan:  $\neg(p_1 \wedge p_2) \models \neg p_1 \vee \neg p_2$   
 $\neg(p_1 \rightarrow p_2) \models \neg p_1 \leftarrow \neg p_2$

**1.4.6 Theorem**

$$\varphi \models \psi \Leftrightarrow \varphi^d \models \psi^d$$

**Beweis:**

$$\llbracket \varphi^d \rrbracket_v = \llbracket \varphi^d \rrbracket_{\bar{v}} = \overline{\llbracket \varphi \rrbracket_{\bar{v}}} = \overline{\llbracket \psi \rrbracket_{\bar{v}}} = \llbracket \psi^d \rrbracket_{\bar{v}} = \llbracket \psi^d \rrbracket_v$$

**1.4.7 Definition (Allgemeingültigkeits- und Erfüllbarkeitsäquivalenz)**

$\varphi$  ist allgemeingültigkeitsäquivalent mit  $\psi$ , falls gilt:  $\models \varphi \Leftrightarrow \models \psi$

$\varphi$  ist erfüllbarkeitsäquivalent mit  $\psi$ , falls gilt:  $\varphi$  erfüllbar  $\Leftrightarrow \psi$  erfüllbar

**Komplexität von konjunktiver und disjunktiver Normalform**

- $SAT$  (Erfüllbarkeit) ist  $NP$ -vollständig
- $SAT_{KNF}$  ist  $NP$ -vollständig
- $TAUT_{DNF}$  ist  $NP$ -vollständig
- $SAT_{DNF}$  ist linear

- $TAUT_{KNF}$  ist linear

Transformation einer Formel in eine erfüllbarkeitsäquivalente disjunktive Normalform bzw. in eine allgemeingültigkeitsäquivalente konjunktive Normalform kann nicht polynomiell sein (falls  $P \neq NP$ ).

Die Transformation einer Formel  $\varphi$  in eine erfüllbarkeitsäquivalente konjunktive Normalform oder in eine allgemeingültigkeitsäquivalente disjunktive Normalform kann jedoch polynomiell sein.

Das ist gut für Verfahren zum Testen der Erfüllbarkeit der konjunktiven Normalform.  $\Rightarrow$  Resolution

### 1.5 Natürliches Schließen

Nur Formel in  $\wedge, \rightarrow, \perp$

Einführungsregel

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge I$$

$$\frac{\begin{array}{c} (i) \varphi \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I_{(i)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} (i) \neg \varphi \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\varphi} \rightarrow RAA_{(i)} \text{ (Reductio ad absurdum)}$$

Beseitigungsregel

$$\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi} \wedge E$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}{\psi} \rightarrow E \text{ (modus ponens)}$$

$$\vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$$

$$\frac{\begin{array}{c} (1) [\varphi \rightarrow \perp] \quad [\varphi]^{(2)} \\ \perp \\ (\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp \end{array} \rightarrow E}{\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)} \rightarrow I_{(1)}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow ((\varphi \rightarrow \perp) \rightarrow \perp)}{\varphi \rightarrow \neg \neg \varphi} \rightarrow I_{(2)}$$

$$\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$$

$$\frac{\begin{array}{c} (2) [\neg \neg \varphi] \quad [\neg \varphi]^{(1)} \\ \perp \\ \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi \end{array} \rightarrow E}{\neg \neg \varphi \rightarrow \varphi} \rightarrow I_{(1)}$$

$$\varphi \rightarrow \psi \vdash \neg \psi \rightarrow \neg \varphi$$

$$\frac{\begin{array}{c} (3) [\varphi \rightarrow \psi] \quad [\varphi]^{(1)} \\ \psi \\ (2) [\neg \psi] \end{array} \rightarrow E}{\perp} \rightarrow I_{(1)}$$

$$\frac{\perp}{\varphi \rightarrow \perp} \rightarrow I_{(2)}$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \perp}{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi} \rightarrow I_{(2)}$$

$$\frac{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi}{(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \neg \varphi)} \rightarrow I_{(3)}$$

$$\varphi, \neg \varphi \vdash \psi$$

$$\frac{\neg \varphi \quad \varphi}{\perp} \rightarrow RAA$$

$$\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma) \vdash \psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)$$

$$\frac{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \sigma) \quad [\varphi]^{(1)}}{\psi \rightarrow \sigma} \rightarrow E$$

$$\frac{\psi \rightarrow \sigma \quad [\psi]^{(2)}}{\sigma} \rightarrow E$$

$$\frac{\sigma}{\varphi \rightarrow \sigma} \rightarrow I$$

$$\frac{\varphi \rightarrow \sigma}{\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \sigma)} \rightarrow I_2$$

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \neg\varphi &:= \varphi \rightarrow \perp \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \neg(\varphi \rightarrow \psi) \vdash \varphi \wedge \neg\psi \\ \begin{array}{c} [\neg\varphi]^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array} \\ \frac{\neg(\varphi \rightarrow \psi) \quad \varphi \rightarrow \psi}{\perp} \text{RAA}_1 \rightarrow E \quad \frac{\begin{array}{c} [\psi]^{(2)} \\ \varphi \rightarrow \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \rightarrow I \\ \frac{\perp}{\psi \rightarrow \perp} \rightarrow I \\ \underbrace{\psi \rightarrow \perp}_{\neg\psi} \\ \frac{\varphi \wedge \neg\psi}{\perp} \wedge I \end{array}$$

**1.5.1 Definition (Ableitungen in NK')**

Die Menge der Ableitungen im NK' (Kalkül des natürlichen Schließens) ist die kleinste Menge  $\mathbb{D}$ , für die gilt:

- $\varphi \in \mathbb{D}$  für jedes  $\varphi$

- $\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \in \mathbb{D}$ ,  $\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \in \mathbb{D}$

- $\frac{\mathcal{D}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{\varphi_1}{\varphi_1} \in \mathbb{D}$

- $\frac{\mathcal{D}}{\varphi \rightarrow \psi} \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{\begin{array}{c} [\varphi]^{(i)} \\ \mathcal{D} \\ \psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} \in \mathbb{D}$ , wobei  $i$  neu ist und beliebig viele Vorkommen von Annahmen  $\varphi$  eingeklammert werden können.

- $\frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi \rightarrow \psi} \in \mathbb{D}$ ,  $\frac{\mathcal{D}_\infty \quad \mathcal{D}_\in}{\varphi \rightarrow \psi} \in \mathbb{D}$

- $\frac{\mathcal{D}}{\perp} \in \mathbb{D} \Rightarrow \frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi]^{(i)} \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\varphi} \text{RAA}_1 \in \mathbb{D}$ , wobei  $i$  neu ist.

**1.5.2 Definition (Abhängigkeit einer Ableitung in NK')**

Eine Ableitung in NK' ist von einer Menge  $\Gamma$  von Formeln *abhängig*, wenn  $\Gamma$  die Menge derjenigen Formeln ist, die als ungeklammerte Annahme in der Ableitung vorkommen.  $\mathcal{D}$  ist eine Ableitung von  $\varphi$  aus der Menge  $\Gamma$ , wenn  $\mathcal{D}$  mit  $\varphi$  endet und  $\mathcal{D}$  von einer Teilmenge von  $\Gamma$  abhängt.  $\varphi$  ist ableitbar aus  $\Gamma$  ( $\Gamma \vdash \varphi$ ), falls es eine Ableitung von  $\varphi$  aus  $\Gamma$  gibt.

**1.5.3 Korollar**

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi &\Rightarrow \Gamma' \vdash \varphi \text{ für ein endliches } \Gamma' \subseteq \Gamma \\ \Gamma, \Delta \vdash \varphi &:= \Gamma \cup \Delta \vdash \varphi \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi &:= \Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \end{aligned}$$

**1.5.4 Korollar**

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma' \vdash \varphi$  für jedes  $\Gamma' \subseteq \Gamma$

**1.5.5 Lemma (Ableitungsregeln aus Mengen)**

1.  $\Gamma \vdash \varphi$  falls  $\varphi \in \Gamma$
2.  $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma' \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \cup \Gamma' \vdash \varphi \wedge \psi$
3.  $\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \psi$
4.  $\Gamma, \varphi \vdash \psi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi$
5.  $\Gamma \vdash \varphi, \Gamma' \vdash \varphi \rightarrow \psi \Rightarrow \Gamma \cup \Gamma' \vdash \psi$
6.  $\Gamma, \neg\varphi \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
7.  $\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

**1.6 Vollständigkeit**

**1.6.1 Theorem (Korrektheit)**

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

**Beweis:**

Sei  $\mathcal{D}$  eine Ableitung von  $\varphi$  aus  $\Gamma$ . Zeige  $\Gamma \models \varphi$  durch Induktion über den Aufbau von  $\mathcal{D}$ .

- $\mathcal{D} = \varphi$ , dann ist  $\varphi \in \Gamma$ , dann  $\Gamma \models \varphi$ .

- $\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}$ , dann sind  $\mathcal{D}_1$  und  $\mathcal{D}_2$  Ableitungen von  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  aus  $\Gamma$ . Nach Induktionsvoraussetzung  $\Gamma \models \varphi_1, \Gamma \models \varphi_2$ , also  $\Gamma \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$ .

- $\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi_1 \vee \varphi_2}$ , dann sind  $\mathcal{D}_1$  und  $\mathcal{D}_2$  Ableitungen von  $\varphi_1$  bzw.  $\varphi_2$  aus  $\Gamma$ . Nach Induktionsvoraussetzung  $\Gamma \models \varphi_1, \Gamma \models \varphi_2$ , also  $\Gamma \models \varphi_1 \vee \varphi_2$ .

- $\mathcal{D} = \frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_i}$  analog.

- $\mathcal{D} = \frac{[\varphi]^{(i)}}{\mathcal{D}'}$   
 $\mathcal{D} = \frac{\psi}{\varphi \rightarrow \psi} \quad (i)$ , dann ist  $\frac{[\varphi]^{(i)}}{\mathcal{D}'}$  eine Ableitung von  $\psi$  aus  $\Gamma \cup \{\varphi\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt:  
 $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ . Also  $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$ .

- $\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2}{\varphi \rightarrow \psi \quad \varphi}$  ausgelassen.

- $\mathcal{D} = \frac{[\neg\varphi]^{(i)}}{\mathcal{D}'}$   
 $\mathcal{D} = \frac{\perp}{\varphi} \quad (i)$ , dann ist  $\frac{[\neg\varphi]^{(i)}}{\mathcal{D}'}$  eine Ableitung von  $\perp$  aus  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung gilt:  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \models \perp$ , also  $\Gamma \models \varphi$ .

**1.6.2 Definition (Konsistenz)**

$\Gamma$  heißt *konsistent*, falls  $\Gamma \not\vdash \perp$ .

**1.6.3 Lemma**

Folgendes ist äquivalent:

1.  $\Gamma$  ist konsistent
2. Für kein  $\varphi$  ist  $\Gamma \vdash \varphi$  und  $\Gamma \vdash \neg\varphi$
3. Es gibt ein  $\varphi$  mit  $\Gamma \not\vdash \varphi$

**Beweis:**

1.  $\Rightarrow$  3.:  $\checkmark$

3.  $\Rightarrow$  2.: Sei  $\Gamma \vdash \varphi$ ,  $\Gamma \vdash \neg\varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$  für jedes  $\varphi$

2.  $\Rightarrow$  1.:  $\Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi, \Gamma \vdash \neg\varphi$

**1.6.4 Lemma**

$\Gamma$  ist konsistent, falls es eine Belegung  $v$  gibt, mit  $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$  für alle  $\varphi \in \Gamma$ .

**Beweis:**

Sei  $\Gamma$  nicht konsistent, dann  $\Gamma \vdash \varphi$  und  $\Gamma \vdash \neg\varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$  und  $\Gamma \models \neg\varphi$ . Also gibt es keine Belegung, die alle Formeln aus  $\Gamma$  verifiziert, da sonst sowohl  $\varphi$  als auch  $\neg\varphi$  verifiziert werden müssten.

Erfüllbar  $\Rightarrow$  konsistent

**1.6.5 Lemma**

$\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  inkonsistent  $\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$

$\Gamma \cup \{\varphi\}$  inkonsistent  $\Rightarrow \Gamma \vdash \neg\varphi$

**1.6.6 Definition (Maximale Konsistenz)**

$\Gamma$  heißt *maximal konsistent*, falls  $\Gamma$  konsistent und falls für jedes  $\varphi \notin \Gamma$  gilt:  $\Gamma \cup \{\varphi\}$  ist inkonsistent.

**1.6.7 Lemma (Erweiterbarkeit von Formelmengen)**

Jede konsistente Formelmenge lässt sich zu einer maximal konsistenten Formelmenge erweitern.

**Beweis:**

Wir zählen alle Formeln ab:  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$

Verfahren: Statt  $\varphi_n: \varphi$   $\underbrace{\quad}_n$   
 ( )  $\wedge$   $\rightarrow$   $\perp$  '  $p$   
 1 2 3 4 5 6 7

$p_3 \rightarrow ( p_7 \wedge p_2 )$   
 7666 4 1 76666666 3 766 2

$\Gamma_0 := \Gamma$

$\Gamma_{n+1} := \begin{cases} \Gamma_n \cup \{\varphi_n\} & , \text{ falls } \Gamma \cup \{\varphi_n\} \text{ konsistent} \\ \Gamma_n & , \text{ sonst} \end{cases}$

$\Gamma^* = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Gamma_i$

1. Jedes  $\Gamma_n$  ist konsistent. Induktion über  $n$ :

2.  $\Gamma^*$  ist konsistent.

Sei  $\Gamma^*$  inkonsistent, d.h.  $\Gamma^* \vdash \perp$ ,  
 dann  $\Gamma' \vdash \perp$  für endliches  $\Gamma' \subseteq \Gamma^*$ ,  
 dann  $\Gamma_n \vdash \perp$  für ein geeignet großes  $n$ .  
 Widerspruch zu 1.

3.  $\Gamma^*$  ist maximal konsistent

Sei  $\Gamma' = \Gamma^* \cup \{\psi\}$ ,  $\psi \notin \Gamma^*$ , dann  $\psi = \varphi_n$ .  
 Das heißt  $\Gamma' = \Gamma^* \cup \{\varphi_n\}$ .  
 Das heißt  $\Gamma_n \cup \{\varphi_n\}$  konsistent. Dann  $\varphi_n \in \Gamma_{n+1} \subseteq \Gamma^*$ . Widerspruch.

**1.6.8 Lemma**

Jede konsistente Aussagenmenge  $\Gamma$  lässt sich zu einer maximal konsistenten Aussagenmenge  $\Gamma^*$  erweitern.

**1.6.9 Lemma**

Falls  $\Gamma$  maximal konsistent ist, ist  $\Gamma$  unter Ableitbarkeit abgeschlossen, d.h.  $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$ .

**Beweis:**

Sei  $\Gamma \vdash \varphi$ ,  $\varphi \notin \Gamma$ . Also  $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \perp$ , d.h.  $\Gamma \vdash \neg\varphi$ . Widerspruch zur Konsistenz.

**1.6.10 Lemma**

Sei  $\Gamma$  maximal konsistent. Dann gilt:

1. Entweder  $\varphi \in \Gamma$  oder  $\neg\varphi \in \Gamma$  für jedes  $\varphi$ .
2.  $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$  genau dann, wenn  $(\varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma)$ .

**Beweis:**

1.  $\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \Gamma \not\vdash \varphi$   
 $\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \not\vdash \perp$ , d.h.  $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  konsistent  
 $\Rightarrow \neg\varphi \in \Gamma$   
 $\neg\varphi \notin \Gamma \Rightarrow \varphi \in \Gamma$  analog.
2.  $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma, \varphi \in \Gamma \Rightarrow \psi \in \Gamma$  nach 1.6.9 (modus ponens)  
 $\varphi \rightarrow \psi \notin \Gamma \Rightarrow \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \notin \Gamma$   
 $\Rightarrow \varphi \wedge \neg\psi \in \Gamma$  nach 1.  
 $\Rightarrow \varphi \in \Gamma, \neg\psi \in \Gamma$   
 $\Rightarrow \varphi \in \Gamma, \psi \notin \Gamma \checkmark$

**1.6.11 Lemma**

Falls  $\Gamma$  konsistent, dann ist  $\Gamma$  erfüllbar, d.h. es gibt ein  $v$ , so dass für alle  $\varphi \in \Gamma$  gilt:  $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$

**Beweis:**

Sei  $\Gamma^* \subseteq \Gamma$  maximal konsistent.

Definiere:  $v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \Gamma^*$

Zeige:  $\llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$  für alle  $\varphi \in \Gamma^*$

$$\varphi = p: \quad \llbracket p \rrbracket_v = v(p) = 1 \Leftrightarrow p \in \Gamma^*$$

$$\varphi = \neg\psi: \quad \varphi \in \Gamma^* \Leftrightarrow \psi \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \llbracket \psi \rrbracket_v = 0 \Leftrightarrow \llbracket \varphi \rrbracket_v = 1$$

$$\varphi = \psi_1 \wedge \psi_2: \quad \varphi \in \Gamma^* \Leftrightarrow \psi_1 \in \Gamma^* \text{ und } \psi_2 \in \Gamma^* \stackrel{IV}{\Leftrightarrow} \llbracket \psi_1 \rrbracket_v = 1 \text{ und } \llbracket \psi_2 \rrbracket_v = 1 \Leftrightarrow \llbracket \psi_1 \wedge \psi_2 \rrbracket_v = 1$$

$$\varphi = \psi_1 \rightarrow \psi_2: \quad \varphi \in \Gamma^* \Leftrightarrow (\psi_1 \in \Gamma^* \Rightarrow \psi_2 \in \Gamma^*) \Leftrightarrow \llbracket \psi_1 \rrbracket_v = 1 \Rightarrow \llbracket \psi_2 \rrbracket_v = 1 \Leftrightarrow \llbracket \psi_1 \rightarrow \psi_2 \rrbracket_v = 1$$

**1.6.12 Korollar**

$\Gamma \not\vdash \varphi \Leftrightarrow$  es gibt ein  $v$ , so dass  $\llbracket \psi \rrbracket_v = 1$  für alle  $\psi \in \Gamma, \llbracket \varphi \rrbracket_v = 0$

**Beweis:**

$$\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \not\vdash \perp$$

**1.6.13 Satz (Vollständigkeit)**

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

**Beweis:**

$\Gamma \not\vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$  aus dem Korollar.

**1.6.14 Korollar (Endlichkeitssatz)**

$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma' \models \varphi$  für ein endliches  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ .

**1.6.15 Korollar (Kompaktheitssatz)**

$\Gamma$  erfüllbar  $\Leftrightarrow$  jedes endliche  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  erfüllbar.

**Beweis:**

$\Gamma$  unerfüllbar  $\Rightarrow \Gamma \models \perp \Rightarrow \Gamma \vdash \perp \Rightarrow \Gamma' \vdash \perp$  ( $\Gamma'$  endlich)  $\Rightarrow \Gamma' \models \perp \Rightarrow \Gamma'$  ist unerfüllbar

**1.7 Disjunktion**

**1.7.1 Lemma**

1.  $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$
2.  $\psi \vdash \varphi \vee \psi$
3.  $\Gamma, \varphi \vdash \sigma, \Gamma, \psi \vdash \sigma \Rightarrow \Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma$

**Beweis:**

1.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\varphi \wedge \neg\psi]_1}{\neg\varphi} \wedge E \quad \varphi}{\perp} \rightarrow E}{(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \perp} \rightarrow I_1}{\underbrace{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}_{\varphi \vee \psi}} \rightarrow E$$

2.

$$\frac{\varphi \vee \psi}{\underbrace{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}_{\sigma}} \rightarrow E$$

3.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{[\varphi]_1}{\sigma} \rightarrow E}{\perp} \rightarrow I_1}{\neg\varphi} \rightarrow E \quad \frac{\frac{\frac{[\psi]_2}{\sigma} \rightarrow E}{\perp} \rightarrow I_2}{\neg\psi} \rightarrow E}{\neg\varphi \wedge \neg\psi} \wedge I}{\frac{\varphi \vee \psi}{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)} \rightarrow E} \rightarrow E}{\frac{\perp}{\sigma} RAA_3} \rightarrow E$$

**1.7.2 Definition**

NK hat  $\vee$  als Grundzeichen. Für  $\vee$  gelten folgende Regeln:

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \quad \frac{\frac{[\varphi]_i}{\sigma} \quad \frac{[\psi]_i}{\sigma}}{\sigma} \vee E_i$$

**1.7.3 Lemma**

$$\varphi \vee \psi \dashv\vdash_{NK} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$$

**Beweis:**

“ $\vdash$ ”:

$$\begin{aligned} & \varphi \vdash_{NK'} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ & \Rightarrow \varphi \vdash_{NK} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \text{ und } \psi \vdash_{NK} \underbrace{\neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)}_{\sigma} \\ & \Rightarrow \varphi \vee \psi \vdash_{NK} \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \end{aligned}$$

“ $\dashv$ ”:

$$\begin{aligned} & \Gamma, \varphi \vdash_{NK'} \sigma, \Gamma, \psi \vdash_{NK'} \sigma \Rightarrow \Gamma, \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash_{NK'} \sigma \\ & \Rightarrow \Gamma, \varphi \vdash_{NK} \sigma, \Gamma, \psi \vdash_{NK} \sigma \Rightarrow \Gamma, \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash_{NK} \sigma \\ & \Rightarrow \Gamma \vdash_{NK} \varphi \vee \psi, \Gamma, \psi \vdash_{NK} \varphi \vee \psi \Rightarrow \Gamma, \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash_{NK} \varphi \vee \psi \\ & \Rightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \vdash_{NK} \varphi \vee \psi \end{aligned}$$

## 2 Prädikatenlogik

### 2.1 Struktur

#### 2.1.1 Definition (Struktur)

Eine Struktur ist eine Folge  $\langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{c_i : i \in I\} \rangle$  wobei

- $A$  nicht leere Menge
- $R_1, \dots, R_n$  Relationen über  $A$
- $F_1, \dots, F_m$  Funktionen über  $A$
- $\{c_i : i \in I\} \subseteq A$  Menge ausgezeichneter Konstanten

**Beispiel:**

$\langle \mathbb{Z}, +, \bar{x}, 0 \rangle$

Metasprachliche Variablen für Strukturen:  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \dots$

$|\mathfrak{A}| = A$

#### 2.1.2 Definition (Ähnlichkeitstyp einer Struktur)

$\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \dots, R_n, F_1, \dots, F_m, \{c_i : i \in I\} \rangle$  ist die Folge  $\langle r_1, \dots, r_n, a_1, \dots, a_m, \kappa \rangle$  wobei

- $r_i$  Stelligkeit von  $R_i$
- $a_i$  Stelligkeit von  $F_i$
- $\kappa = |I|$

**Beispiel:**

$\langle -, 2, 1, 1 \rangle$  Ähnlichkeitstyp = Symmetrie

**Beispiel:**

Struktur  $\langle \mathbb{N}, <, +, \cdot, s, \{0, 1, 2, 3, \dots\} \rangle$

Signatur  $\langle 2, 2, 2, 1, \kappa_0 \rangle$

## 2.2 Die Sprache einer Signatur

Es sei eine Signatur  $\langle r_1, \dots, r_n, a_1, \dots, a_m, \kappa \rangle$  gegeben. Das Alphabet der zugehörigen Sprache besteht aus:

1. Prädikatenzeichen:  $P_1, \dots, P_n$  der Stelligkeit  $r_1, \dots, r_n, \doteq$
2. Funktionszeichen:  $f_1, \dots, f_m$  der Stelligkeit  $a_1, \dots, a_m$
3. Konstantenzeichen:  $\dot{c}_i, i \in I$
4. Variablen:  $x_0, x_1, x_2, \dots$
5. Junktoren:  $\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
6. Quantoren:  $\forall, \exists$
7. Hilfszeichen:  $(, ), ,$

**2.2.1 Definition (Menge TERM)**

Die Menge *TERM* der Terme ist die kleinste Menge, die alle Konstanten  $\dot{c}_i$  und alle Variablen  $x_i$  enthält, und mit  $t_1, \dots, t_m$  auch  $f_i(t_1, \dots, t_m)$  enthält, falls  $f_i$   $n$ -stellig.

**2.2.2 Definition (Menge FORM)**

Die Menge *FORM* der Formeln ist die kleinste Menge, die

- $t_1 \doteq t_2$  für alle Terme  $t_1, t_2$
- $P_i(t_1, \dots, t_n)$  für alle Terme  $t_1, \dots, t_n$ , wobei  $P_i$   $n$ -stellig,
- $\perp$

enthält (Atome) und die mit  $\varphi, \psi$  auch  $(\neg\varphi)$ ,  $(\varphi \circ \psi)$ ,  $(\forall x)\varphi$ ,  $(\exists x)\varphi$  enthält.

**2.2.3 Lemma**

Sei  $A(t)$  eine Eigenschaft von Termen. Falls  $A(t)$  für alle Konstanten und Variablen  $t$ , und falls mit  $A(t_1, \dots, t_n)$  auch  $A(f(t_1, \dots, t_n))$  gilt, dann gilt  $A(t)$  für alle  $t \in \text{TERM}$ .

**2.2.4 Lemma (Aufbau von Formeln)**

Sei  $A(\varphi)$  eine Eigenschaft von Formeln.

Falls  $A(\varphi)$  für atomare  $\varphi$ ,  $A(\varphi)$ ,  $A(\psi) \Rightarrow A(\neg\varphi)$ ,  $A(\varphi \circ \psi)$ ,  $A(\forall x\varphi)$ ,  $A(\exists x\varphi)$ , dann gilt  $A(\varphi)$  für alle  $\varphi \in \text{FORM}$ .

**2.2.5 Definition (Freie Variablen)**

$$\begin{aligned} FV(x_i) &= \{x_i\}, FV(\dot{c}_i) = \emptyset \\ FV(f(t_1, \dots, t_m)) &= FV(t_1) \cup \dots \cup FV(t_m) \end{aligned}$$

**2.2.6 Definition**

$$\begin{aligned} FV(t_1 \doteq t_2) &= FV(t_1) \cup FV(t_2) \\ FV(\perp) &= \emptyset \\ FV(\neg\varphi) &= FV(\varphi) \\ FV(\varphi \circ \psi) &= FV(\varphi) \cup FV(\psi) \\ FV(\exists x\varphi) &= FX(\varphi) \setminus \{x\} = FV(\forall x\varphi) \end{aligned}$$

**2.2.7 Definition (Gebundene Variablen)**

$$\begin{aligned} BV(\varphi) &= \emptyset, \text{ falls } \varphi \text{ atomar} \\ BV(\neg\varphi) &= BV(\varphi) \\ BV(\varphi \circ \psi) &= BV(\varphi) \cup BV(\psi) \\ BV(\forall x\varphi) &= BV(\exists x\varphi) = BV(\varphi) \cup \{x\} \end{aligned}$$

**Bemerkung:**

$FV(\varphi) \cap BV(\varphi)$  ist nicht notwendig leer

$$\begin{aligned} \varphi : x_0 = x_0 \wedge \exists x_0(x_0 = x_0) \\ x_0 \in FV(\varphi) \text{ und } x_0 \in BV(\varphi) \end{aligned}$$

**2.2.8 Definition (Geschlossenheit)**

Eine Formel  $\varphi$  bzw. ein Term  $t$  heißt geschlossen, falls  $FV(\varphi) = \emptyset$  bzw.  $FV(t) = \emptyset$ .  
 Geschlossene Formeln in Aussagen:  $SENT$ .  
 $TERM_c$ : Geschlossene Terme.

**2.2.9 Definition (Substitution in Atomen)**

$s[t/x]$  ist definiert durch:

- $y[t/x] = y$ , falls  $x \neq y$
- $y[t/x] = t$ , falls  $y = x$
- $c[t/x] = c$ , falls  $c$  Konstante
- $f(t_1, \dots, t_m)[t/x] = f(t_1[t/x], \dots, t_m[t/x])$

**2.2.10 Definition (Substitution in komplexen Termen)**

$\varphi[t/x]$  ist definiert durch:

- $\perp[t/x] = \perp$
- $t_1 \doteq t_2[t/x] = t_1[t/x] \doteq t_2[t/x]$
- $P(t_1, \dots, t_m)[t/x] = P(t_1[t/x], \dots, t_m[t/x])$
- $(\neg\varphi)[t/x] = \neg(\varphi[t/x])$
- $(\varphi \circ \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \circ \psi[t/x]$
- $(\forall y\varphi)[t/x] = \forall y\varphi$ , falls  $x = y$
- $(\forall y\varphi)[t/x] = \forall y(\varphi[t/x])$  falls  $x \neq y$
- $(\exists y\varphi)$  analog.

Simultane Substitution ergibt sich dann äquivalent zur Aussagenlogik. Beispielsweise:

$$x_1 \doteq x_2[x_2, x_1/x_1, x_2] = x_2 \doteq x_1$$

**2.2.11 Definition (Freiheit von Variablen)**

$t$  ist frei für  $x$  in  $\varphi$  falls:

- $\varphi$  ist atomar
- $\varphi = \neg\varphi_1$ ,  $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$  und  $t$  frei für  $x$  in  $\varphi_1, \varphi_2$
- $\varphi = \exists y\psi$  und ( $x \notin FV(\forall y\psi)$  oder  $y \notin FV(t)$ ) und  $t$  ist frei für  $x$  in  $\psi$
- $(\forall y\varphi)$  analog.

**Alternative Definition:**

Sei  $\varphi$  eine Formel und  $t$  ein Term, dann sagt man  $t$  ist *frei einsetzbar* für  $x$  ( $x$  ist eine beliebige Variable) in  $\varphi$ , wenn an jeder Stelle von  $\varphi$ , wo  $x$  als freie Variable von  $\varphi$  vorkommt, gilt, dass  $x$  nicht einer Teilformel von  $\varphi$  der Form  $\forall w\psi$  oder  $\exists w\psi$  angehört mit  $w \in FV(t)$ .

**Beispiele:**

- $x_2$  frei für  $x_0$  in  $\exists x_3 P(x_0, x_3)$
- $f(x_0, x_1)$  nicht frei für  $x_0$  in  $\exists x_1 P(x_0, x_3)$
- $x_5$  ist frei für  $x_1$  in  $P(x_1, x_3) \rightarrow \exists x_1 Q(x_1, x_2)$

**Annahme:**

$\varphi[t/x]$ : angenommen, dass  $t$  frei für  $x$  in  $\varphi$ .

**Notation:**

Statt  $\varphi$  und  $\varphi[t/x]$  schreiben wir auch  $\varphi(x)$  und  $\varphi(t)$ .

$x_1 \doteq x_2 \vee \exists x_2 P(x_2) \rightarrow \$$

**2.2.12 Definition**

$\sigma[\varphi/\$]$  ist definiert durch:

$$\sigma[\varphi/\$] = \begin{cases} \sigma & \text{falls } \sigma \neq \$ \text{ und } \sigma \text{ atomar} \\ \varphi & \text{falls } \sigma = \$ \end{cases}$$

$$\neg\sigma[\varphi/\$] = \neg(\sigma[\varphi/\$])$$

$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)[\varphi/\$] = \sigma_1[\varphi/\$] \circ \sigma_2[\varphi/\$]$$

$$(\exists x\sigma)[\varphi/\$] = \exists x(\sigma[\varphi/\$])$$

$(\forall x\sigma)$  analog.

**2.2.13 Definition**

$\varphi$  ist frei für  $\$$  in  $\sigma$  falls:

- $\sigma$  ist atomar
- $\sigma = \neg\sigma_1$ ,  $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$  und  $\varphi$  frei für  $\$$  in  $\sigma_1, \sigma_2$
- $\sigma = \exists y\tau$  und ( $\$$  kommt nicht in  $\tau$  vor oder  $y \notin FV(\varphi)$  und  $\varphi$  ist frei für  $\$$  in  $\tau$ )
- $(\forall y\tau)$  analog.

**2.3 Semantik**

Gegeben eine Struktur  $\mathfrak{A}$  der Signatur  $\Sigma$ . Gegeben eine Sprache der Signatur  $\Sigma$ .

**2.3.1 Definition (Belegung)**

Eine Belegung ist eine partielle Zuordnung  $v : VAR \rightarrow |\mathfrak{A}|$ . Die Bedeutung eines Terms  $t$  in  $\mathfrak{A}$  relativ zu einer Belegung  $v$  ist wie folgt definiert:

$$\llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = v(x)$$

$\llbracket \dot{c} \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = c$ , wobei  $c$  das Korrelat von  $\dot{c}$  in  $\mathfrak{A}$  ist

$$\llbracket f_i(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = F_i(\llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$$

**Beispiel:**

$$\mathfrak{A} = \langle \mathbb{N}, +, s, 0 \rangle$$

$$+, \dot{s}, 0$$

$$v : x_0 \mapsto 0$$

$$v : x_1 \mapsto s(s(0))$$

$$\begin{aligned} & \llbracket (x_0 + \dot{0}) + \dot{s}(x_1) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ &= \llbracket x_0 + \dot{0} \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} + \llbracket \dot{s}(x_1) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ &= (\llbracket x_0 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} + \llbracket \dot{0} \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}) + s(\llbracket x_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}) \\ &= (v(x_0) + 0) + s(v(x_1)) \\ &= (0 + 0) + s(s(0)) \end{aligned}$$

### 2.3.2 Definition

$\llbracket t \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$  ist wie folgt definiert:

- $\llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} := v(x)$
- $\llbracket \dot{a} \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} := a$
- $\llbracket \dot{f}(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = f(\llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$

### 2.3.3 Definition

$\llbracket \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$  ist wie folgt definiert:

- $\llbracket \perp \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 0$
  - $\llbracket t_1 \dot{=} t_2 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket t_2 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
  - $\llbracket \dot{P}(t_1, \dots, t_n) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } P(\llbracket t_1 \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
  - $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \min(\llbracket \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$
  - $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \max(\llbracket \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$
  - $\llbracket \neg \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1 - \llbracket \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$
  - $\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \max(1 - \llbracket \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \llbracket \psi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$
  - $\llbracket \forall x \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \llbracket \varphi \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} \star \text{ f\"ur jedes } a \in |\mathfrak{A}| \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
  - $\llbracket \exists x \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \llbracket \varphi \rrbracket_{v[x \mapsto a]}^{\mathfrak{A}} \star \text{ f\"ur ein } a \in |\mathfrak{A}| \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$
- $\star (v[x \mapsto a])(x) = a$   
 $v[x \mapsto a](y) = v(y), \text{ falls } y \neq x$

$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \llbracket \varphi \rrbracket^{\mathfrak{A}} = 1$ , falls keine freie Variable in  $\varphi$

$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow \llbracket \forall \vec{x} \varphi \rrbracket^{\mathfrak{A}} = 1$ , falls  $x = \vec{FV}(\varphi)$

$\Rightarrow$  "Allabschluss" von  $\varphi$

$\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \llbracket \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = 1$ , wobei  $v : x_{i_1} \mapsto a_1, x_{i_2} \mapsto a_2, \dots, x_{i_n} \mapsto a_n$  mit  $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} : FV(\varphi), i_1 < i_2 < \dots < i_n$

**Beispiel:**

$$\mathfrak{A} \models x_{15} \dot{=} x_{11}[a_1, a_2] \Leftrightarrow \llbracket x_{15} \dot{=} x_{11} \rrbracket_{v[x_{11} \mapsto a_1, x_{15} \mapsto a_2]}^{\mathfrak{A}} = 1 \Leftrightarrow a_2 = a_1$$

### 2.3.4 Definition (Gültigkeit, Erfüllbarkeit)

$\varphi$  heißt (allgemein) gültig in  $\mathfrak{A}$ , falls  $\mathfrak{A} \models \varphi$ .  $\varphi$  heißt erfüllbar in  $\mathfrak{A}$  falls  $\mathfrak{A} \models \exists \varphi$ .

Das heißt:  $\mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  für geeignete  $a_1, \dots, a_n$ , falls  $\varphi$   $n$  freie Variablen hat.

### 2.3.5 Lemma

$\varphi$  heißt allgemein gültig, falls  $\mathfrak{A} \models \varphi$  für jedes  $\mathfrak{A}$ .  
 $\varphi$  heißt erfüllbar, falls  $\varphi$  in  $\mathfrak{A}$  erfüllbar für ein  $\mathfrak{A}$ .

## 2.4 Eigenschaft der Quantorenlogik

### 2.4.1 Theorem

$$1. \models \neg \forall x \varphi \Leftrightarrow \exists x \neg \varphi$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \llbracket \neg \forall x \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= 1 - \llbracket \forall x \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ \llbracket \forall x \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \llbracket \varphi \rrbracket_v^{[x \rightarrow a]} \text{ für alle } a \in |A| \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} = \llbracket \exists x \neg \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ \llbracket \exists x \varphi \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \llbracket \varphi \rrbracket_v^{[x \rightarrow a]} \text{ für ein } a \in |A| \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. \models \neg \exists x \varphi \Leftrightarrow \forall x \neg \varphi$$

$$3. \models \forall x \varphi \Leftrightarrow \neg \exists x \neg \varphi$$

$$4. \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \neg \forall x \neg \varphi$$

### 2.4.2 Theorem

$$\models \forall x (\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \models \forall x \varphi \wedge \forall x \psi$$

**Beweis:**

$\mathfrak{A} \models \forall x_1 (\varphi \wedge \psi)[a_1, \dots, a_n]$ , wobei  $\forall x_1 (\varphi \wedge \psi)$   $n$  freie Variablen enthält.  
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $a \in |\mathfrak{A}|$ :  $\mathfrak{A} \models \varphi \wedge \psi[a, a_1, \dots, a_n]$   
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $a \in |\mathfrak{A}|$ :  $\mathfrak{A} \models \varphi[a, a_1, \dots, a_n]$  und  $\mathfrak{A} \models \psi[a, a_1, \dots, a_n]$   
 $\Leftrightarrow$  für jedes  $a \in |\mathfrak{A}|$ :  $\varphi[a, a_1, \dots, a_n]$  und für jedes  $a \in |\mathfrak{A}|$ :  $\psi[a, a_1, \dots, a_n]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x \varphi[a_1, \dots, a_n]$  und  $\mathfrak{A} \models \forall x \psi[a_1, \dots, a_n]$   
 $\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)[a_1, \dots, a_n]$

### 2.4.3 Koinzidenz-Theorem

$$\begin{aligned} v_1 \upharpoonright FV(t) = v_2 \upharpoonright FV(t) &\Rightarrow \llbracket t \rrbracket_{v_1}^{\mathfrak{A}} = \llbracket t \rrbracket_{v_2}^{\mathfrak{A}} \\ \mathfrak{A} \models \varphi: \llbracket \forall(\varphi) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= 1 \\ \forall(\varphi): \forall x_1 \dots x_n \varphi & \quad FV(\varphi) = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \models \varphi: \text{Für alle } \mathfrak{A}: \mathfrak{A} &\models \varphi \end{aligned}$$

Sei  $\Gamma$  Menge von Aussagen,  $\varphi: \Gamma \models \varphi$ : Für alle  $\mathfrak{A}$ : Falls für alle  $\psi \in \Gamma$ :  $\mathfrak{A} \models \psi$ , dann  $\mathfrak{A} \models \varphi$ .  $\varphi$  folgt logisch aus  $\Gamma$ .

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & \quad a_1, \dots, a_n \in |\mathfrak{A}| \\ \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} = FV(\varphi) & \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n \\ \llbracket \varphi \rrbracket_{v[a_1/x_{i_1}, \dots, a_n/x_{i_n}]}^{\mathfrak{A}} &= 1 \\ \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \end{aligned}$$

### 2.4.4 Überführungstheorem

$$\begin{aligned} \llbracket t[t'/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= \llbracket t \rrbracket_{v[[t']_v^{\mathfrak{A}}/x]}^{\mathfrak{A}} \\ \llbracket \varphi[t'/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= \llbracket \varphi \rrbracket_{v[[t']_v^{\mathfrak{A}}/x]}^{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

**Beweis:**

I.A.:  $\llbracket x[t'/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket t' \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} = \llbracket x \rrbracket_v^{\mathfrak{A}[\llbracket t' \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}/x]}$

I.S.:  $\checkmark$

**2.4.5 Substitutionstheoreme**

1.  $\models t_1 \doteq t_2 \rightarrow s[t_1/x] \doteq s[t_2/x]$
2.  $\models t_1 \doteq t_2 \rightarrow (\varphi[t_1/x] \leftrightarrow \varphi[t_2/x])$
3.  $\models (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\sigma[\varphi/\$] \leftrightarrow \sigma[\psi/\$])$

**Beweisskizze:**

1. Induktion über Aufbau von  $s$ :  
 $s \doteq x$ :  $s[t_1/x] \doteq t_1, s[t_2/x] \doteq t_2$   
 Zu zeigen:  $\models t_1 \doteq t_2 \rightarrow t_1 \doteq t_2 \checkmark$   
 $s \neq x$ : Zu zeigen:  $\models t_2 \doteq t_2 \rightarrow s \doteq s \checkmark$   
 $s \doteq f(t'_1, \dots, t'_n)$   
 Zu zeigen:  $\models t_1 \doteq t_2 \rightarrow f(t'_1[t_1/x], \dots, t'_n[t_1/x]) \doteq f(t'_1[t_2/x], \dots, t'_n[t_2/x])$   
 I.V.:  $\models t_1 \doteq t_2 \rightarrow t'_i[t_1/x] \doteq t'_i[t_2/x]$   
 $\llbracket f(t'_1[t_1/x], \dots, t'_n[t_1/x]) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$   
 $= f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t'_1[t_1/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t'_n[t_1/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$   
 $= f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t'_1[t_2/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t'_n[t_2/x] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}})$  nach I.V.  
 $= \llbracket f(t'_1[t_2/x], \dots, t'_n[t_2/x]) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}}$

2. Analog: Induktion über Aufbau von  $\varphi$ .

3. Induktion über Aufbau von  $\sigma$ :

I.A.:  $\sigma \doteq \$ \checkmark \sigma \neq \$ \checkmark$

I.S.:  $\sigma \doteq \forall x \tau$

$$\begin{aligned} \llbracket \sigma[\varphi/\$] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} &= \llbracket \forall x \tau[\varphi/\$] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ &= \llbracket \forall x (\tau[\varphi/\$]) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ &= \min_{a \in |\mathfrak{A}|} \llbracket \tau[\varphi/\$] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}[a/x]} \\ &= \min_{a \in |\mathfrak{A}|} \llbracket \tau[\psi/\$] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}[a/x]} \text{ nach I.V.} \\ &= \llbracket \forall x (\tau[\psi/\$]) \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \\ &= \llbracket \forall x \tau[\psi/\$] \rrbracket_v^{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

**2.4.6 Definition (Pränexe Normalform)**

Eine Formel ist in pränexer Normalform, falls sie die Form hat:  $Q_1 z_1 \dots Q_n z_n \varphi$ , wobei  $Q_1, \dots, Q_n \forall$  oder  $\exists$  sind und  $\varphi$  quantorenfrei ist.

**2.4.7 Theorem**

Zu jedem  $\varphi$  gibt es ein  $\psi$  in pränexer Normalform mit  $\models \varphi \leftrightarrow \psi$ .

**Beweis:**

Gesetze:

1. Gebundene Umbenennung

Dadurch können alle Quantoren ungleichnamig gemacht werden.

2. Quantoren nach außen ziehen

$$\models \neg \forall x \varphi \leftrightarrow \exists x \neg \varphi$$

$$\models \neg \exists x \varphi \leftrightarrow \forall x \neg \varphi$$

$$\models Q_1 x \varphi \wedge Q_2 y \psi \leftrightarrow Q_1 x Q_2 y (\varphi \wedge \psi), \text{ falls } y \notin FV(\varphi) \text{ und } x \notin FV(\psi)$$

$$\models Q_1 x \varphi \vee Q_2 y \psi \leftrightarrow Q_1 x Q_2 y (\varphi \vee \psi), \text{ falls } y \notin FV(\varphi) \text{ und } x \notin FV(\psi)$$

$$\models (Q_1 x \varphi \rightarrow Q_2 y \psi) \leftrightarrow \overline{Q_1} x Q_2 y (\varphi \rightarrow \psi)$$

**Beispiel:**

$$\neg \forall x P x \vee (\exists x Q x y \rightarrow \forall x R x)$$

$$\neg \forall y_1 P y_1 \vee (\exists y_2 Q y_2 y \rightarrow \forall y_3 R y_3)$$

$$\exists y_1 \neg P y_1 \vee \forall y_2 \forall y_3 (Q y_2 y \rightarrow R y_3)$$

$$\exists y_1 \forall y_2 \forall y_3 (\neg P y_1 \vee (Q y_2 y \rightarrow R y_3))$$

**Bemerkung:**

$\varphi$  und  $\psi$  seien beliebige Formeln und  $Q \in \{\forall, \exists\}$ . Setze außerdem  $\forall^{-1} := \exists$  und  $\exists^{-1} := \forall$ . Es gelten folgende Regeln:

Regel 1: Sei  $x$  eine Variable, die nicht in  $\psi$  frei vorkommt, dann gilt:

$$Q x \varphi \square \psi \models Q x (\varphi \square \psi) \text{ mit } \square \in \{\wedge, \vee\}$$

Regel 2:  $\neg Q x \varphi \models Q^{-1} x \neg \varphi$

Regel 3:  $Q x \varphi \models Q y \varphi[y/x]$  wobei  $y$  eine Variable ist, die nicht in  $Q x \varphi$  vorkommt.

**Wiederholungsstunde**

**Gesetze der Quantorenlogik**

$$\models \neg \forall x_1 \varphi \leftrightarrow \exists x_1 \neg \varphi$$

Zu zeigen:  $\mathfrak{A} \models \forall (\neg \forall x_1 \varphi \leftrightarrow \exists x_1 \neg \varphi)$

Seien  $\vec{x}$  die freien Variablen in dieser Formel, angeordnet entsprechend ihrem Index. Sei  $\vec{a}$  Bezeichnung für ein Tupel von Gegenständen aus  $|\mathfrak{A}|$  derselben Länge wie  $\vec{x}$ .

**Beispiel:**

$$\mathfrak{A} \models \forall (\neg \forall x_1 \varphi \leftrightarrow \exists x_1 \neg \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \neg \forall x_1 \varphi \leftrightarrow \exists x_1 \neg \varphi[\vec{a}] \text{ für alle } \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow [\mathfrak{A} \models \neg \forall x_1 \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \exists x_1 \neg \varphi[\vec{a}]] \text{ für alle } \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow [\mathfrak{A} \not\models \forall x_1 \varphi[\vec{a}] \Leftrightarrow \text{es gibt } a_1 : \mathfrak{A} \not\models \varphi[a_1, \vec{a}]] \text{ für alle } \vec{a}$$

$$\Leftrightarrow [\text{nicht für alle } a_1 : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, \vec{a}] \Leftrightarrow \text{es gibt } a_1 : \mathfrak{A} \not\models \varphi[a_1, \vec{a}]] \text{ für alle } \vec{a}$$

Letzteres ist der Fall.

**Beispiel:**

$$\models \forall x_1 \forall x_2 \varphi \leftrightarrow \forall x_2 \forall x_1 \varphi \quad FV(\varphi) = \{x_1, x_2\}$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \varphi \leftrightarrow \forall x_2 \forall x_1 \varphi$$

$$\Leftrightarrow [\mathfrak{A} \models \forall x_1 \forall x_2 \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x_2 \forall x_1 \varphi]$$

$$\Leftrightarrow [\text{Für alle } a_1, a_2 : \mathfrak{A} \models \varphi[a_1, a_2] \Leftrightarrow \text{Für alle } a_1, a_2 : \mathfrak{A} \models \varphi[a_2, a_1]]$$

Das ist der Fall.

**Beispiel:**

$$\models \forall x_1 \varphi \leftrightarrow \forall x_2 \varphi[x_2/x_1]$$

$$\mathfrak{A} \models \forall x_1 \varphi \leftrightarrow \forall x_2 \varphi[x_2/x_1]$$

$$\Leftrightarrow [\mathfrak{A} \models \forall x_1 \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x_2 \varphi[x_2/x_1]]$$

$$\Leftrightarrow \text{Für alle } a : \mathfrak{A} \models \varphi[a] \Leftrightarrow \text{Für alle } a : \mathfrak{A} \models \varphi[x_2/x_1][a]$$

Das ist der Fall.

**2.5 Identität**

**2.5.1 Theorem**

Es gilt:

1.  $\models \forall x(x \doteq x)$

2.  $\models \forall xy(x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$  (Reflexivität)

3.  $\models \forall xyz(x \doteq y \wedge y \doteq z \rightarrow x \doteq z)$  (Transitivität)

4.  $\models \forall x_1, \dots, x_n \forall y_1, \dots, y_n \left( \bigwedge_{i=1}^n x_i \doteq y_i \rightarrow t(x_1, \dots, x_n) \doteq t(y_1, \dots, y_n) \right)$

5.  $\models \forall x_1, \dots, x_n \forall y_1, \dots, y_n \left( \bigwedge_{i=1}^n x_i = y_i \rightarrow (\varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(y_1, \dots, y_n)) \right)$

$$FV(t) \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \wedge \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$$

$$FV(\varphi) \setminus \{x_1, \dots, x_n\} \wedge \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$$

**Beweis:**

$$\mathfrak{A} \models \forall xy(x \doteq y \rightarrow y \doteq x)$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models (x \doteq y \rightarrow y \doteq x)[a, b] \text{ für alle } a, b \in |\mathfrak{A}|$$

$\Leftrightarrow \mathfrak{A} \models x \doteq y[a, b] \Rightarrow \mathfrak{A} \models x \doteq y[a, b]$  für alle  $a, b \in |\mathfrak{A}|$   
 $\Leftrightarrow a = b \Rightarrow b = a$

Letzteres gilt.

## 2.6 Kalkül des logischen Schließens für die Quantorenlogik

$$\frac{\forall x\varphi}{\varphi[t/x]} \forall E \qquad \frac{\forall x\varphi(x)}{\varphi(t)} \qquad \frac{\varphi[y/x]}{\forall x\varphi} \forall I \qquad \frac{\varphi(y)}{\forall x\varphi(x)}$$

Folgende Herleitung führt zu einer falschen Aussage:

$$\frac{\frac{[P(y)]^{(1)}}{\forall xP(x)} \rightarrow I_1}{P(y) \rightarrow \forall xP(x)} \forall I}{\forall z(P(z) \rightarrow \forall xP(x))} \forall I$$

Deswegen muss folgende Nebenbedingung eingeführt werden:

Proviso:  $y$  kommt in keiner Annahme vor, vor der  $\varphi(y)$  abläuft.

$\vdash_{NK'} \forall x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall y\forall x\varphi(x, y)$

$$\frac{\forall x\forall y\varphi(x, y)}{\forall y\varphi(x, y)} \forall E$$

$$\frac{\forall y\varphi(x, y)}{\varphi(x, y)} \forall E$$

$$\frac{\varphi(x, y)}{\forall x\varphi(x, y)} \forall I$$

$$\frac{\forall x\varphi(x, y)}{\forall y\forall x\varphi(x, y)} \forall I$$

$\vdash_{NK'} \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)$

$$\frac{\frac{\frac{[\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))]_{(1)}}{\varphi(x) \wedge \psi(x)} \forall E}{\varphi(x)} \wedge E}{\forall x\varphi(x)} \forall I \qquad \frac{\frac{[\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x))]_{(1)}}{\varphi(x) \wedge \psi(x)} \forall E}{\psi(x)} \wedge E}{\forall x\psi(x)} \forall I}{\forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)} \wedge I}{\forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \rightarrow \forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)} \rightarrow I_1$$

$\vdash_{NK'} \varphi \rightarrow \forall x\varphi$  falls  $x \notin FV(\varphi)$

$$\frac{\frac{[\varphi[y/x]]_{(1)}}{\forall x\varphi} \forall I}{\varphi \rightarrow \forall x\varphi} \rightarrow I_1$$

$\not\vdash_{NK'} \varphi(y) \rightarrow \forall x\varphi(x)$

### 2.6.1 Identität im natürlichen Schließen

$$\frac{}{x \doteq x} RI_1 \qquad \frac{x \doteq y}{y \doteq x} RI_2 \qquad \frac{x \doteq y \quad y \doteq z}{x \doteq z} RI_4 \qquad \frac{x_1 \doteq y_1 \dots x_n \doteq y_n}{t(x_1, \dots, x_n) \doteq t(y_1, \dots, y_n)} RI_4$$

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \dots x_n \doteq y_n \quad \varphi(x_1, \dots, x_n)}{\varphi(y_1, \dots, y_n)}$$

### 2.6.2 Theorem

$RI_1 + RI_4$  reichen aus.

**Beweis**

$$\begin{array}{l}
 RI_2 : \frac{x \doteq y \quad \overline{x \doteq x}}{y \doteq x} \qquad \frac{x \doteq y \quad \overline{z \doteq x[x/z]}}{z \doteq x[y/z]} \\
 RI_3 : \frac{\frac{x \doteq y}{y \doteq x} \quad y \doteq z}{x \doteq z} \qquad \frac{\frac{x \doteq y}{y \doteq x} \quad u \doteq z[x/u]}{u \doteq z[x/u]}
 \end{array}$$

**2.6.3 Theorem**

$RI_n$  lässt sich durch ersetzen durch:

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \dots x_n \doteq y_n}{f(x_1, \dots, x_n) \doteq f(y_1, \dots, y_n)} \quad \text{für jedes Funktionszeichen } f.$$

$$\frac{x_1 \doteq y_1 \dots x_n \doteq y_n \quad P(x_1, \dots, x_n)}{P(y_1, \dots, y_n)} \quad \text{für jedes Prädikatzeichen } P.$$

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2 \vdash g(f(x_1, x_2)) = g(f(y_1, y_2))$$

$$\frac{\frac{x_1 \doteq y_1 \quad x_2 \doteq y_2}{f(x_1, x_2) \doteq f(y_1, y_2)} \quad RI_4}{g(f(x_1, x_2)) \doteq g(f(y_1, y_2))} \qquad \frac{x \doteq y}{g(x) \doteq g(y)}$$

**2.6.4 Theorem**

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma[t/x] \vdash \varphi[t/x]$$

**NK mit Existenz:**

1.  $\exists x\varphi := \neg \forall x \neg \varphi$

**2.6.5 Theorem**

$$\begin{array}{l}
 \varphi[t/x] \vdash \exists x\varphi \\
 \varphi[y/x] \vdash C \Rightarrow \exists x\varphi \vdash C \quad (y \text{ neu gegenüber } C \text{ und } \exists x\varphi) \\
 \varphi[t/x] \vdash \neg \forall x \neg \varphi \qquad \neg \forall x \neg \varphi \vdash C \\
 \frac{[\forall x \neg \varphi]_{(1)}}{\neg \varphi[t/x] \quad \varphi[t/x]} \quad \frac{\frac{\neg C}{\neg \varphi[y/x]}}{\forall x \neg \varphi \quad \neg \forall x \neg \varphi} \\
 \frac{\perp}{\neg \forall x \neg \varphi} \quad (1) \qquad \frac{\perp}{C} \quad RAA
 \end{array}$$

Regel für  $\exists$ :

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi} \quad \exists I \qquad \frac{\frac{\frac{[\varphi[y/x]]_1}{\vdots} C}{\exists x\varphi} \quad \exists E(1)}{C}$$

**2.6.6 Theorem**

$$\neg \exists x\varphi \dashv\vdash \forall x \neg \varphi$$

**Beweis:**

$$\frac{\frac{\frac{[\varphi]_{(1)}}{\exists x\varphi} \quad \frac{\forall x\neg\varphi}{\neg\varphi}}{\perp}}{\perp} \exists E(1) \qquad \frac{\frac{[\varphi]_{(1)}}{\exists x\varphi} \quad \neg\exists x\varphi}{\perp} (1)}{\forall x\neg\varphi} \forall I$$

**2.6.7 Theorem**

$\Gamma \vdash_{NK'} \varphi \Rightarrow \Gamma[t/x] \vdash_{NK'} \varphi[t/x]$  für eine Variante<sup>1</sup>  $\Gamma', \varphi'$  von  $\Gamma, \varphi$ , in der keine Variable aus  $t$  als gebundene Variable vorkommt.

**Beweis:**

1.  $\varphi \in \Gamma$  (Annahme). Benenne gebundene Variablen in  $\varphi$  so um, dass sie von Variablen in  $t$  verschieden sind.
2. Aussagenlogische Regeln.  $\checkmark$

3. Es geht  $\frac{\forall y\psi(y)}{\psi(s)} \forall A$  über in  $\frac{\forall u\psi'(u) [t/x]}{\psi'(s) [t/x]}$ , wobei  $u \simeq y$ , falls  $y$  in  $t$  vorkommt. Ansonsten ist  $u$  eine bisher noch nicht vorgekommene Variable.

4. Es ergibt sich  $\frac{\psi(y)}{\forall z\psi(z)} \forall I$  Falls  $y$  in  $t$  vorkommt, wenden wir die IV ("mit  $y$  als  $x$  und  $t$  als  $v$ ") an und erhalten  $\psi(v)$ , wobei  $v$  in  $t$  nicht vorkommt.

Da  $v$  nicht in den offenen Annahmen vorkommen kann, ändert sich an den Annahmen nichts. Daraus ergibt

sich wieder mit der IV eine Ableitung  $\psi'(v) [t/x]$  und dann  $\frac{\psi'(v) [t/x]}{\forall u\psi'(u) [t/x]}$ , wobei  $u \simeq z$ , falls  $z$  in  $t$  nicht vorkommt.

**2.6.8 Korollar**

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma[t/x] \vdash \varphi[t/x]$$

**Bemerkungen:**

1. Gilt auch für NK.
2. Gilt nicht für NKE.

**2.6.9 Definition**

Erweiterung von  $\Gamma \models \varphi$  auf freie Variablen.

$$\mathfrak{A} \models \Gamma[\vec{a}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \text{ für alle } \varphi \in \Gamma.$$

$$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \Gamma[\vec{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]) \text{ für alle } \mathfrak{A}, \vec{a}$$

<sup>1</sup>Resultat von gebundener Umbenennung

**2.6.10 Theorem**

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$$

**Beweis:**

1.  $\varphi$  Annahme, d.h.  $\varphi \in \Gamma$   
 Zu zeigen:  $\mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi[\vec{a}]$
2. Anwendung Aussagenlogik-Regel, z.B.  $\rightarrow I$

$$\begin{array}{c} [\varphi_1] \\ \vdots \\ \varphi_2 \end{array}$$

Es ergibt sich:  $\frac{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}$

Dann  $\Gamma, \varphi_1 \vdash \varphi_2$

$\Rightarrow (\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi_1\}[\vec{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \varphi_2[\vec{a}]$  für alle  $\mathfrak{A}, \vec{a}$ )

$\Rightarrow \mathfrak{A} \models (\varphi_1 \rightarrow \varphi_2)[\vec{a}]$  für alle  $\mathfrak{A}, \vec{a}$ .

Analog für die anderen Aussagenlogik-Fälle.

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \psi(y) \end{array}$$

3. Sei  $\forall I$  angewendet:  $\forall z\psi(z)$

o.B.d.A. nehmen wir an, dass  $y$  unsere erste Variable ist. Dann gilt:  $\Gamma \vdash \psi(y) \Rightarrow \Gamma \models \psi(y)$

$\Rightarrow [\mathfrak{A} \models \Gamma[b, \vec{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(y)[b, \vec{a}]$  für alle  $\mathfrak{A}$  und  $b, \vec{a}$ ]

$\Rightarrow [\mathfrak{A} \models \Gamma[\vec{a}] \Rightarrow$  für alle  $b : \mathfrak{A} \models \psi(y)[b, \vec{a}]$  für alle  $\mathfrak{A}, \vec{a}$ ]

$\Rightarrow [\mathfrak{A} \models \Gamma[\vec{a}] \Rightarrow \mathfrak{A} \models \forall z\psi(y)[\vec{a}]$  für alle  $\mathfrak{A}$  und  $\vec{a}$ ]

**2.7 Vollständigkeitssatz**

**2.7.1 Lemma**

Falls  $\Gamma$  konsistent, dann  $\Gamma$  erfüllbar.

**2.7.2 Vollständigkeitssatz**

$$\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

**Beweis:**

$\Gamma \not\models \varphi \Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  konsistent

$\Rightarrow \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$  erfüllbar

$\Rightarrow \Gamma \not\models \varphi$

**2.7.3 Definition**

Eine Sprache ist eine Menge von Formeln.

1. Eine Theorie  $T$  ist eine Formelmenge, die unter Ableitbarkeit abgeschlossen ist, d.h.  $T \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in T$ .
2. Falls  $T = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}$ , dann heißt  $\Gamma$  Axiomatisierung in  $T$ . Die Elemente in  $T$  heißen Axiome.
3.  $T$  ist eine Henkin-Theorie, falls es für jede Aussage  $\exists x\varphi(x)$  eine Konstante  $c$  gibt mit  $\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \in T$  (“ $c$  heißt Belegexemplar / Zeuge / witness”)

### 2.7.4 Definition

Seien  $T$  und  $T'$  Theorien in  $L$  bzw.  $L'$ .

1.  $T'$  ist Erweiterung von  $T$ , falls  $T \subseteq T'$ .
2.  $T'$  ist konservative Erweiterung von  $T$ , falls  $T \subseteq T'$  und  $T' \cap L = T$ .

### 2.7.5 Definition

Sei  $T$  eine Theorie in  $L$ .  $L^*$  enthalte zu jeder Aussage  $\sigma$  der Form  $\exists x\varphi(x)$  eine Konstante  $c_\sigma$ , so dass verschiedenen  $\sigma$  und  $\sigma'$  verschiedene Konstanten  $c_\sigma$  und  $c_{\sigma'}$  entsprechen.  $T^*$  sei die Theorie, die axiomatisiert wird durch  $T \cup \{\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c_\sigma) \mid \sigma \text{ der Form } \exists x\varphi(x)\}$

### 2.7.6 Lemma

$$\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma[x/c] \vdash \varphi[x/c]$$

### 2.7.7 Lemma

$T^*$  ist konservativ über  $T$ .

**Beweis:**

$$\begin{aligned} & \Gamma, \exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c) \vdash \psi \quad \Gamma, \psi \in L \\ \Rightarrow & \Gamma \vdash (\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(c)) \rightarrow \psi \\ \Rightarrow & \Gamma \vdash (\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi \\ \Rightarrow & \Gamma \vdash \forall y[(\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi] \quad (y \text{ nicht in } \Gamma) \\ \Rightarrow & \Gamma \vdash \exists y(\exists x\varphi(x) \rightarrow \varphi(y)) \rightarrow \psi \quad (y \text{ nicht in } \varphi) \\ \Rightarrow & \Gamma \vdash (\exists x\varphi(x) \rightarrow \exists y\varphi(y)) \rightarrow \psi \\ \Rightarrow & \Gamma \vdash \psi \end{aligned}$$

Hieraus durch Induktion  $\Gamma, A_{x_1} \dots A_{x_n} \vdash \varphi$

$$\Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$$

### 2.7.8 Lemma

$T_\omega$  ist Henkin-Theorie und konservativ über  $T$ .

**Beweis:**

1.  $T_\omega$  ist eine Theorie.

$$T_\omega \vdash \sigma \Rightarrow \varphi_0, \dots, \varphi_n \vdash \sigma \text{ für } \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\} \subseteq T_\omega$$

$$\varphi_i \in T_{m_i} \text{ für ein } m_i : m := \max\{m_0, \dots, m_n\}$$

$$\text{Da } T_{m_i} \subseteq T_m : T_m \vdash \sigma.$$

$$\text{Daher } \sigma \in T_m, \text{ da } T_m \text{ Theorie.}$$

$$\Rightarrow \sigma \in T_\omega$$

2.  $T_\omega$  ist eine Henkin-Theorie. Nach Konstruktion.

3.  $T_\omega$  ist konservativ über  $T$ .

$$T_\omega \vdash \sigma \Rightarrow T_m \vdash \sigma. \text{ Induktion über } m. \text{ (Benutze voriges Lemma als Inklusionsmodell.)}$$

### 2.7.9 Korollar

$$T \forall \perp \Leftrightarrow T_\omega \forall \perp$$

### 2.7.10 Lindenbaum-Lemma

Jede konsistente Theorie ist enthalten in einer maximal konsistenten Theorie.

#### Beweis:

Behalte Menge  $A$  aller konsistenten Erweiterungen  $T'$  von  $T$ , geordnet durch  $\subseteq$ .

1. Jede Kette in  $A$  hat eine obere Schranke. Sei  $\{T_i | i \in I\}$  eine Kette, dann ist  $\bigcup \{T_i | i \in I\}$  eine konsistente Erweiterung.
2. Daher hat  $A$  ein maximales Element  $T_{max}$ .
3.  $T_{max}$  ist maximal konsistent. [Zorns Lemma]

### 2.7.11 Lemma

Sei  $T_{max}$  eine maximal konsistente Erweiterung von  $T_\omega$ , dann ist  $T_{max}$  eine Henkin-Theorie.

### 2.7.12 Lemma

Sei  $T_{max}$  eine maximal konsistente Henkin-Erweiterung von  $T$ , dann hat  $T_{max}$  ein Modell.

#### Beweis:

$$f^{\mathfrak{A}}(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) = f(t_1, \dots, t_n)$$

$$\langle \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow T_{max} \vdash P(t_1, \dots, t_n)$$

$$c^{\mathfrak{A}} = \tilde{c}$$

Diese Definition ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten  $t$  von  $\tilde{t}$ , da in  $T_{max}$  die Gleichheitsaxiome gelten.

$$\text{Es gilt: } \llbracket t \rrbracket^{\mathfrak{A}} = \tilde{t}.$$

$$\llbracket c \rrbracket^{\mathfrak{A}} = c^{\mathfrak{A}} = \tilde{c}$$

$$\llbracket f(t_1, \dots, t_n) \rrbracket^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{A}}(\llbracket t_1 \rrbracket^{\mathfrak{A}}, \dots, \llbracket t_n \rrbracket^{\mathfrak{A}}) = f^{\mathfrak{A}}(\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n) = f^{\mathfrak{A}}(t_1, \dots, t_n)$$

#### Behauptung:

$$\mathfrak{A} \models \varphi \Leftrightarrow T_{max} \vdash \varphi$$

Induktion über  $\varphi$ :

$$\varphi \text{ atomar } \neq \perp: \mathfrak{A} \models t_1 \doteq t_2 \Leftrightarrow \tilde{t}_1 = \tilde{t}_2 \Leftrightarrow T_{max} \vdash t_1 \doteq t_2$$

$$\mathfrak{A} \models P(t_1, \dots, t_n) \Leftrightarrow \langle \tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow T_{max} \vdash P(t_1, \dots, t_n)$$

$$\varphi = \perp: \mathfrak{A} \not\models \perp \quad T_{max} \not\vdash \perp$$

$$\varphi = \psi \rightarrow \sigma: \mathfrak{A} \models \psi \rightarrow \sigma \Leftrightarrow (\mathfrak{A} \models \psi \Rightarrow \mathfrak{A} \models \sigma) \Leftrightarrow T_{max} \vdash \psi \Rightarrow T_{max} \vdash \sigma \Leftrightarrow T_{max} \vdash \psi \rightarrow \sigma$$

$$\varphi = \psi \wedge \sigma \text{ analog.}$$

$$\varphi = \forall x \psi(x) \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi(a) \text{ für alle } a \in |\mathfrak{A}|$$

Hieraus:  $\mathfrak{A} \models \psi(c)$ , wobei  $c$  Beispiel für  $\exists x \neg \psi(x) \Rightarrow T_{max} \vdash \psi(c) \Rightarrow T_{max} \vdash \neg \exists x \neg \psi(x)$ , da  $T_{max} \vdash \exists x \neg \psi(x) \rightarrow \neg \psi(c) \Rightarrow T_{max} \vdash \forall x \psi(x)$

Umgekehrt:  $T_{max} \vdash \forall x \psi(x) \Rightarrow T_{max} \vdash \psi(t)$  für alle geschlossenen Terme  $t \Rightarrow \mathfrak{A} \models \psi(t)$  für alle geschlossenen Terme  $t \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi(t)[[t]^{\mathfrak{A}}] \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \psi(x)[\tilde{t}]$  für alle geschlossenen Terme  $t \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \forall x \psi(x)$

Wir betrachten Sprachen, deren Konstantenmengen beliebige Kardinalität  $\kappa$  haben können.

$L$ : Menge der Aussagen von  $L$

$|L| := \min(\aleph_0, \kappa)$

**2.7.13 Vorläufer des Modellexistenzlemmas:**

$\Gamma$  konsistente Aussagenmenge  $\Rightarrow \Gamma$  hat Modell der Kardinalität  $|L|$ .

**2.7.14 Kompaktheitssatz:**

$\Gamma$  erfüllbar  $\Leftrightarrow$  jede endliche Teilmenge erfüllbar.

**Beweis:**

$\Gamma \not\models \perp \Leftrightarrow \Gamma \not\vdash \perp \Leftrightarrow$  für jedes endliche  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ :  $\Gamma' \not\vdash \perp \Leftrightarrow$  für jedes endliche  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ :  $\Gamma' \not\models \perp$

**2.7.15 Endlichkeitssatz**

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow$  Es gibt endliches  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  mit  $\Gamma' \models \varphi$ .

**Beweis:**

$\Gamma \models \varphi \Leftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow$  Es gibt  $\Gamma' \subseteq \Gamma$  endlich.  $\Gamma' \vdash \varphi, \Gamma' \models \varphi$

**2.7.16 Definition:**

$\mathfrak{A} \models \Gamma \Leftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$  für jedes  $\varphi \in \Gamma$

$Mod(\Gamma) := \{\mathfrak{A} : \mathfrak{A} \models \Gamma\}$

$Th(K) := \{\sigma : \mathfrak{A} \models \sigma \text{ für alle } \mathfrak{A} \in K\}$  (wobei  $K$  eine Menge von Strukturen)

**2.7.17 Lemma:**

1.  $\Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma')$
2.  $K \subseteq K' \Rightarrow Th(K') \subseteq Th(K)$

**Beweis:**

1.  $\mathfrak{A} \models \Delta \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Gamma$  weil  $\Gamma \subseteq \Delta$
2.  $K' \models \varphi \Rightarrow K \models \varphi$  weil  $K \subseteq K'$

**2.7.18 Löwenheim-Skolem abwärts**

Sei  $\Gamma$  eine Menge von Aussagen in  $L$  mit  $|L| = \kappa$  und  $\lambda > \kappa$ . Falls  $\Gamma$  ein Modell der Kardinalität  $\lambda$  hat, dann auch eines für jedes  $\kappa'$  mit  $\kappa \leq \kappa' \leq \lambda$ .

**Beweis:**

Füge zu  $L$  eine Menge  $\{c_i | i \in I\}$  von neuen Konstanten hinzu mit  $c_i \neq c_j$  für  $i, j \in I$  und  $i \neq j$ , wobei  $|I| = \kappa'$ .  $L'$  sei die so erweiterte Sprache. Sei  $\mathfrak{A}$  Modell von  $\Gamma$  der Kardinalität  $\lambda$ . ( $|\mathfrak{A}| = \lambda$ ) Wir erweitern  $\mathfrak{A}$  um  $\kappa'$  viele verschiedene Konstanten zu  $\mathfrak{A}'$  (das ist möglich, da  $|\mathfrak{A}| = \lambda \geq \kappa'$ ).  $\mathfrak{A}'$  ist Modell von  $\Gamma$  und  $\mathfrak{A}' \models c_i \neq c_j$  für  $i \neq j$ .  $\Gamma' = \Gamma \cup \{c_i \neq c_j | i \neq j\}$ . Nach dem Modellexistenzlemma gibt es ein Modell  $\mathfrak{B}$  der Kardinalität  $|\mathfrak{B}| = \kappa'$  von  $\Gamma'$ .

Damit hat auch  $\Gamma$  ein Modell  $\mathfrak{B}$  der Kardinalität  $K'$  (wobei  $\mathfrak{B}$  die Signatur von  $L$  hat,  $|\mathfrak{B}'| = |\mathfrak{B}|$ ).

$$\text{const}(\mathfrak{B}) = \text{const}(\mathfrak{B}') \setminus \{c_i | i \in I\}$$

**2.7.19 Löwenheim-Skolem aufwärts**

Sei  $\Gamma$  eine Menge von Aussagen in  $L$  und  $|L| = \kappa$ . Falls  $\Gamma$  ein Modell der Kardinalität  $\lambda \geq \kappa$  hat, dann auch eines für jedes  $\mu \geq \lambda$ .

**Beweis:**

Wie vorher fügen wir eine Menge  $\{c_i | i \in I\}$  neuer Konstanten zu  $L$  hinzu und  $|I| = \mu$  und betrachte  $\Gamma' := \Gamma \cup \{c_i \neq c_j | i, j \in I, i \neq j\}$ . Wir zeigen, dass jedes  $\Delta \subseteq \Gamma'$  für endliche  $\Delta$  ein Modell hat. Falls  $\Delta$  die Konstanten  $c_{i_1}, \dots, c_{i_k}$  enthält, ist  $\Delta \subseteq \Gamma \cup \{c_{i_p} \neq c_{i_q} | p, q \leq k\} =: \Gamma_0$ . Jedes Modell von  $\Gamma_0$  ist Modell von  $\Delta$ . Sei  $\mathfrak{A} \in \text{Mod}(\Gamma)$ ,  $|\mathfrak{A}| = \lambda$ . Wir erweitern  $\mathfrak{A}$  zu  $\mathfrak{A}'$ , wobei  $\mathfrak{A}'$   $k$  neue Konstanten  $a_1, \dots, a_k$  enthält. Damit  $\mathfrak{A}' \models \Gamma_0$ , also  $\mathfrak{A}' \models \Delta$ . Nach Kompaktheit gibt es Modell  $\mathfrak{B}'$  mit  $\mathfrak{B}' \models \Gamma'$ . Damit  $\mathfrak{B}' \models \Gamma$ , aber auch  $\mathfrak{B} \models \Gamma$ , wobei  $\mathfrak{B}$  Signatur der Ausgangssprache  $L$  hat ( $\text{const}(\mathfrak{B}) = \text{const}(\mathfrak{B}') \setminus \{c_i | i \in I\}$ ). Aus  $\mathfrak{B}' \models c_i \neq c_j$  für  $i \neq j \in I$  folgt  $|\mathfrak{B}'| \geq \mu$ , also auch  $|\mathfrak{B}| \geq \mu$ . Falls  $> \mu$ , wende Löwenheim-Skolem abwärts an.

**2.8 Endlichkeit ist keine erststufige Eigenschaft**

**2.8.1 Lemma**

Wenn  $\Gamma$  beliebig große endliche Modelle hat, dann hat  $\Gamma$  ein unendliches Modell.

**Beweis:**

Sei  $\lambda_n := \exists x_1, \dots, x_n \bigwedge_{\substack{i \neq j \\ i, j \leq n}} x_i \neq x_j$ . "Es gibt mindestens  $n$  Elemente".

$\mathfrak{A} \models \lambda_n \Leftrightarrow |\mathfrak{A}|$  hat mindestens  $n$  Elemente.

$\mathfrak{A} \models \lambda_{n+1} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \lambda_n$

Sei  $\Gamma' = \Gamma \cup \{\lambda_n | n \geq 1\}$ . Sei  $\Delta \subseteq \Gamma'$ , wobei  $\Delta$  endlich. Sei  $\lambda_m$  das  $\lambda_n$  mit größtem  $n$  in  $\Delta$ .

$\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\lambda_m\} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \Rightarrow \mathfrak{A} \models \Delta$ .

$\text{Mod}(\Gamma \cup \{\lambda_m\}) \neq \emptyset$  nach Korollar. Also  $\text{Mod}(\Delta) \neq \emptyset$ . Wegen Kompaktheit gilt:  $\Gamma'$  ist erfüllbar ( $\text{Mod}(\Gamma') \neq \emptyset$ ).

Jedes Modell von  $\Gamma'$  ist unendlich. Dieses Modell ist auch Modell von  $\Gamma$ .

**2.8.2 Korollar**

Sei  $K$  eine Klasse von Strukturen (mit fester Signatur), die endliche Struktur beliebiger Größe enthält, dann gibt es kein  $\Gamma$ , so dass  $\text{Mod}(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \in K | \mathfrak{A} \text{ endlich}\}$ .

**Beweis:**

Andernfalls würde  $\Gamma$  Modelle beliebiger endlicher Größe haben und damit unendliches Modell.

$\Rightarrow$  Es gibt kein  $\Gamma$ , so dass  $Mod(\Gamma) = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \text{ endlich}\}$

$\mathfrak{A} \models \{\lambda_n \mid n \geq 1\} \Rightarrow |\mathfrak{A}|$  unendlich

Es gibt keine endliche Menge mit dieser Eigenschaft. D.h. es gibt kein endliches  $\Gamma$  mit  $\mathfrak{A} \models \Gamma \Leftrightarrow |\mathfrak{A}|$  unendlich.

**2.8.3 Definition**

Eine Menge von Strukturen  $K$  heißt (endlich) axiomatisierbar, falls es (endliches)  $\Gamma$  gibt, so dass  $K = Mod(\Gamma)$ .

**2.8.4 Lemma**

$K$  endlich axiomatisierbar  $\Leftrightarrow K$  und  $K^c$  axiomatisierbar.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \Rightarrow: \quad & K = Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \\ & \Rightarrow K = Mod(\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}) \\ & \Rightarrow K^c = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \notin K\} = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \notin Mod(\{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\})\} = \left\{ \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in Mod(\underbrace{\{\neg(\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n)\}}_{\text{axiomatisierbar}}) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftarrow: \quad & K = Mod(\Gamma), K^c = Mod(\Delta) \\ & \Rightarrow K \cap K^c = Mod(\Gamma) \cap Mod(\Delta) = Mod(\Gamma \cup \Delta) \\ & \Rightarrow \text{es gilt } \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma, \psi_1, \dots, \psi_m \in \Delta, \text{ so dass } Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi_1, \dots, \psi_m\}) = \emptyset \\ & \Rightarrow \underbrace{Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\})}_{\subseteq Mod(\Gamma)=K} \cap \underbrace{Mod(\{\psi_1, \dots, \psi_m\})}_{\subseteq Mod(\Delta)=K^c} = \emptyset \\ & \Rightarrow: \mathfrak{A} \in Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \Rightarrow \mathfrak{A} \notin Mod(\{\psi_1, \dots, \psi_m\}) \Rightarrow \mathfrak{A} \notin Mod(\Delta) \Rightarrow \mathfrak{A} \in K^c \Rightarrow \mathfrak{A} \in K \\ & \mathfrak{A} \in K \Rightarrow \mathfrak{A} \in Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \\ & \text{Also: } K = Mod(\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}) \end{aligned}$$

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Aussagenlogik</b>	<b>2</b>
1.1 Aussagen und Junktoren	2
1.1.1 Definition	2
1.1.2 Definition (Aussagenmenge PROP)	2
1.1.3 Theorem (Induktionsprinzip für Aussagen)	3
1.1.4 Definition (Bildungsfolgen)	3
1.1.5 Theorem (PROP und Bildungsfolgen)	3
1.1.6 Definition (Teilformeln)	4
1.1.7 Theorem (Definition durch Rekursion)	4
1.1.8 Theorem (Ranginduktion)	4
1.2 Semantik	6
1.2.1 Definition (Bewertung)	6
1.2.2 Theorem	6
1.2.3 Lemma	6
1.2.4 Definition (Tautologie)	6
1.2.5 Lemma	6
1.2.6 Definition (Substitution)	7
1.2.7 Theorem (Substitutionssatz)	7
1.3 Grundgesetze der Aussagenlogik	7
1.3.1 Theorem (Algebraische Gesetze)	7
1.3.2 Theorem (Algebraische Umformungen)	7
1.3.3 Definition (Simultane Substitution)	8
1.3.4 Funktionale Vollständigkeit	8
1.3.5 Theorem	8
1.3.6 Definition (Funktionale Vollständigkeit)	9
1.3.7 Definition (Disjunktion und Konjunktion)	9
1.3.8 Lemma	10
1.3.9 Definition (Konjunktive und Disjunktive Normalform)	10
1.3.10 Theorem	10
1.3.11 Definition	11
1.3.12 Lemma	11
1.3.13 Korollar	11
1.4 Dualität	11
1.4.1 Definition (Dualität)	11
1.4.2 Dualitätssatz	11
1.4.3 Definition (Dualer Junktor)	11
1.4.4 Satz	12

1.4.5	Satz	12
1.4.6	Theorem	12
1.4.7	Definition (Allgemeingültigkeits- und Erfüllbarkeitsäquivalenz)	12
1.5	Natürliches Schließen	13
1.5.1	Definition (Ableitungen in NK')	14
1.5.2	Definition (Abhängigkeit einer Ableitung in NK')	14
1.5.3	Korollar	14
1.5.4	Korollar	15
1.5.5	Lemma (Ableitungsregeln aus Mengen)	15
1.6	Vollständigkeit	15
1.6.1	Theorem (Korrektheit)	15
1.6.2	Definition (Konsistenz)	16
1.6.3	Lemma	16
1.6.4	Lemma	16
1.6.5	Lemma	16
1.6.6	Definition (Maximale Konsistenz)	16
1.6.7	Lemma (Erweiterbarkeit von Formelmengen)	16
1.6.8	Lemma	17
1.6.9	Lemma	17
1.6.10	Lemma	17
1.6.11	Lemma	18
1.6.12	Korollar	18
1.6.13	Satz (Vollständigkeit)	18
1.6.14	Korollar (Endlichkeitssatz)	18
1.6.15	Korollar (Kompaktheitssatz)	18
1.7	Disjunktion	19
1.7.1	Lemma	19
1.7.2	Definition	19
1.7.3	Lemma	19
<b>2</b>	<b>Prädikatenlogik</b>	<b>20</b>
2.1	Struktur	20
2.1.1	Definition (Struktur)	20
2.1.2	Definition (Ähnlichkeitstyp einer Struktur)	20
2.2	Die Sprache einer Signatur	20
2.2.1	Definition (Menge <i>TERM</i> )	21
2.2.2	Definition (Menge <i>FORM</i> )	21
2.2.3	Lemma	21
2.2.4	Lemma (Aufbau von Formeln)	21

2.2.5	Definition (Freie Variablen)	21
2.2.6	Definition	21
2.2.7	Definition (Gebundene Variablen)	21
2.2.8	Definition (Geschlossenheit)	22
2.2.9	Definition (Substitution in Atomen)	22
2.2.10	Definition (Substitution in komplexen Termen)	22
2.2.11	Definition (Freiheit von Variablen)	22
2.2.12	Definition	23
2.2.13	Definition	23
2.3	Semantik	23
2.3.1	Definition (Belegung)	23
2.3.2	Definition	24
2.3.3	Definition	24
2.3.4	Definition (Gültigkeit, Erfüllbarkeit)	24
2.3.5	Lemma	25
2.4	Eigenschaft der Quantorenlogik	25
2.4.1	Theorem	25
2.4.2	Theorem	25
2.4.3	Koinzidenz-Theorem	25
2.4.4	Überführungstheorem	25
2.4.5	Substitutionstheoreme	26
2.4.6	Definition (Pränexe Normalform)	26
2.4.7	Theorem	26
2.5	Identität	28
2.5.1	Theorem	28
2.6	Kalkül des logischen Schließens für die Quantorenlogik	29
2.6.1	Identität im natürlichen Schließen	29
2.6.2	Theorem	29
2.6.3	Theorem	30
2.6.4	Theorem	30
2.6.5	Theorem	30
2.6.6	Theorem	30
2.6.7	Theorem	31
2.6.8	Korollar	31
2.6.9	Definition	31
2.6.10	Theorem	32
2.7	Vollständigkeitssatz	32
2.7.1	Lemma	32
2.7.2	Vollständigkeitssatz	32

---

2.7.3	Definition	32
2.7.4	Definition	33
2.7.5	Definition	33
2.7.6	Lemma	33
2.7.7	Lemma	33
2.7.8	Lemma	33
2.7.9	Korollar	34
2.7.10	Lindenbaum-Lemma	34
2.7.11	Lemma	34
2.7.12	Lemma	34
2.7.13	Vorläufer des Modellexistenzlemmas:	35
2.7.14	Kompaktheitssatz:	35
2.7.15	Endlichkeitssatz	35
2.7.16	Definition:	35
2.7.17	Lemma:	35
2.7.18	Löwenheim-Skolem abwärts	35
2.7.19	Löwenheim-Skolem aufwärts	36
2.8	Endlichkeit ist keine erststufige Eigenschaft	36
2.8.1	Lemma	36
2.8.2	Korollar	36
2.8.3	Definition	37
2.8.4	Lemma	37

# Index

- $\models$ , 6
- $\downarrow$ , 9
- $\square$ , 2
- $\models$ , 6
- $|$ , 9
- $p_*$ , 2
- \* (Funktion), 11
- $c$ , 10
- $d$ , 11
- $dn$ , 12
- Äquivalenz
  - Allgemeingültigkeits-, 12
  - Erfüllbarkeits-, 12
- Überführung, 25
  
- abhängig, 14
- Abhängigkeit, 14
- Ableitung, 14
- Allgemeingültigkeit, 12
- Atom, 2
- Aussagenmenge, 2
- Aussagesymbol, 2
  
- Belegung, 23
- Bewertung, 6
- Bildungsfolgen, 3
  
- Disjunktion, 9, 19
- Dualität, 11
  
- Endlichkeit, 18
- Erfüllbarkeitsäquivalenz, 12
- Erweiterbarkeit, 16
  
- FORM, 21
- Freiheit, 22
  
- Geschlossenheit, 22
- Gesetze
  - algebraische, 7
- Gliederungsbaum, 4
  
- Identität, 28
- Induktionsprinzip für Aussagen, 3
  
- Junktor, 2
  - dualer, 11
  
- Koinzidenz, 25
- Kompaktheit, 18
- Komplexität, 12
- Konjunktion, 9
- Konsistenz, 16
  - maximale, 16
  
- NK', 14
  
- Normalform, 10, 12
  - disjunktive, 10, 12
  - konjunktive, 10, 12
  - pränexe, 26
  
- Peirce'scher Pfeil, 9
- PROP, 2
  
- Rang, 4
  - induktion, 4
- Rekursion, 4
  
- Schefferscher Strich, 9
- Semantik, 23
- Struktur, 20
- Substitution, 7, 22, 26
  - simultane, 8
  
- Tautologie, 6
- Teilformeln, 4
- TERM, 21
  
- Variable
  - freie, 21
  - gebundene, 21
- Vollständigkeit, 18
  - funktionale, 8, 9